FP-UNA - CONSTRUYENDO EL FUTURO

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA – Circunferencia y Círculo –Áreas de Figuras Planas

Material de Lectura

Este material de lectura fue elaborado por los docentes de la asignatura Geometría y Trigonometría del CPA de la FP-UNA para el desarrollo de la unidad V de dicha asignatura. Contiene información básica y debe ser complementado con los textos de la bibliografía del programa de estudios.

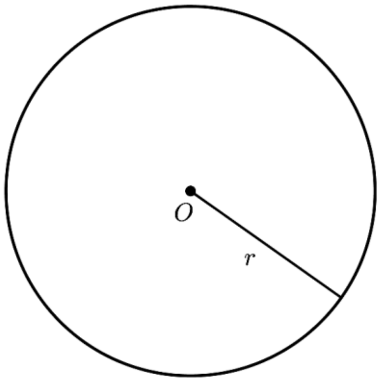
Facultad Politécnica UNA
Curso Preparatorio de Admisión

Índice

1 Circunferencia y Círculo

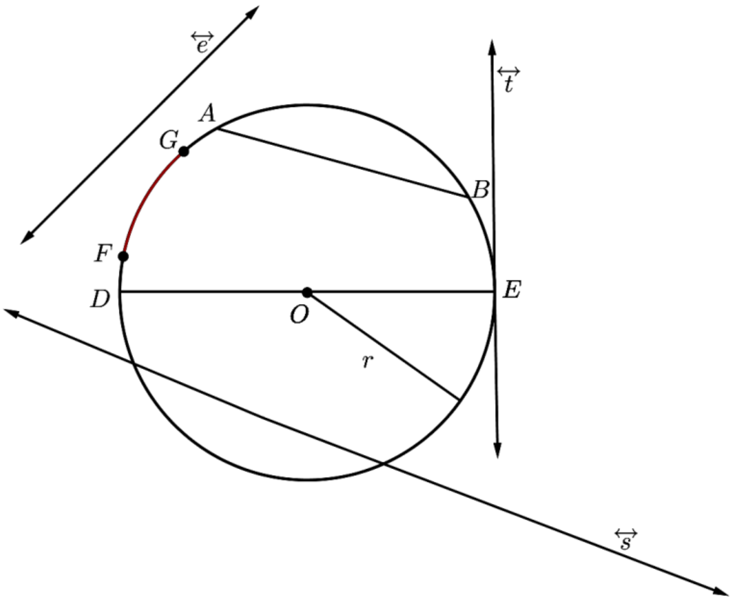
1.1 Circunferencia. Definición

Es el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**, la distancia del centro cualquier punto de la circunferencia se llama **radio**.



$$P = 2\pi r$$

1.1.1 Elementos y líneas notables en una circunferencia.



Elementos:

$O =$ Centro.

$r =$ Radio.

$\overline{AB} =$ Cuerda.

$\overline{DE} =$ Diámetro.

$\overset{\frown}{FG} =$ Arco.

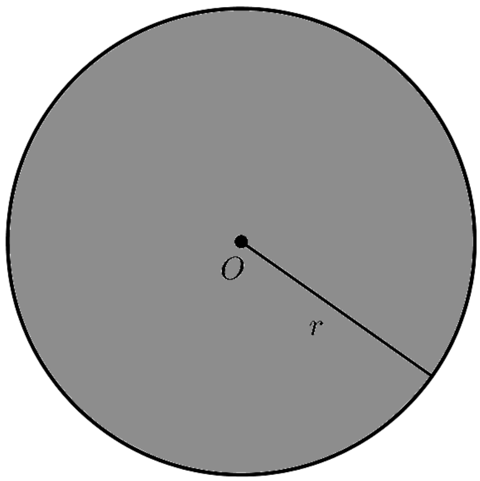
$\overleftrightarrow{e} =$ Recta exterior.

$\overleftrightarrow{t} =$ Recta tangente.

$\overleftrightarrow{s} =$ Recta secante.

1.2 Círculo. Definición

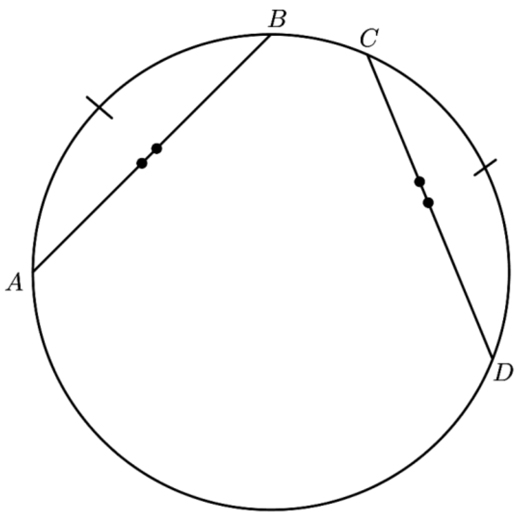
Es la región del plano limitada por una circunferencia.



1.2.1 Teoremas Fundamentales

1.2.1.1 Teorema

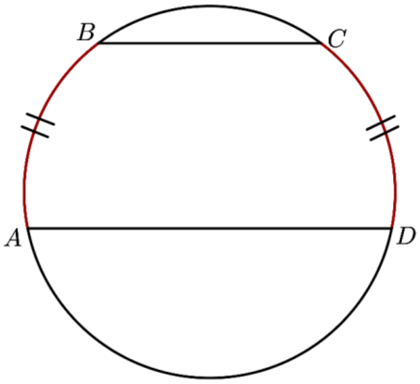
En una misma circunferencia, o en dos circunferencias iguales, a arcos que tienen misma medida corresponden cuerdas que tienen misma medida, y viceversa.



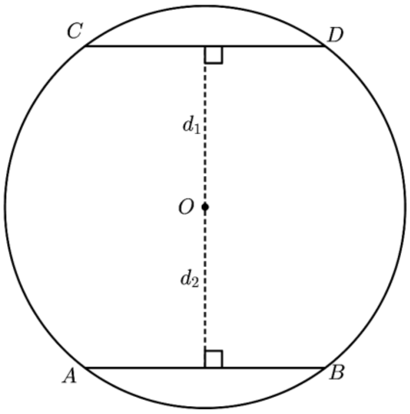
1.2.1.2 Teorema

En una circunferencia:

i) Cuerdas paralelas intersecan arcos que tienen misma medida.



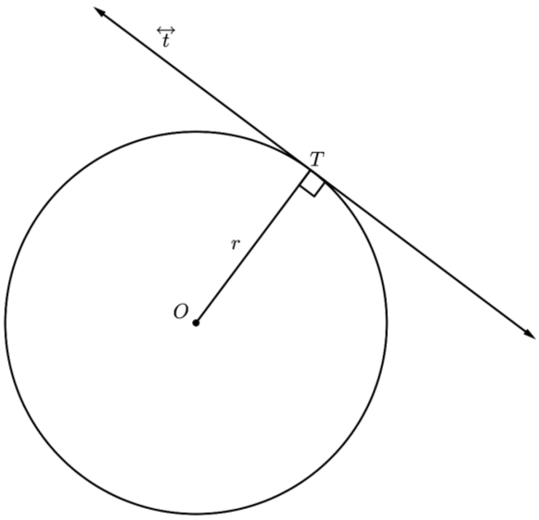
ii) Las cuerdas equidistantes del centro, tienen misma medida.



Si $d_1 = d_2$ entonces $AB = CD$.

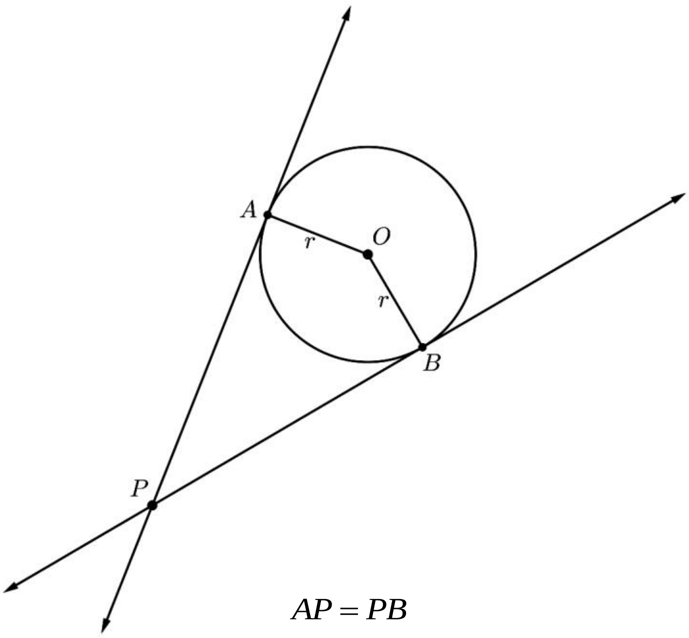
1.2.1.3 Teorema del radio y la tangente

Todo radio que llega al punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente.



1.2.1.4 Teorema de las dos tangentes.

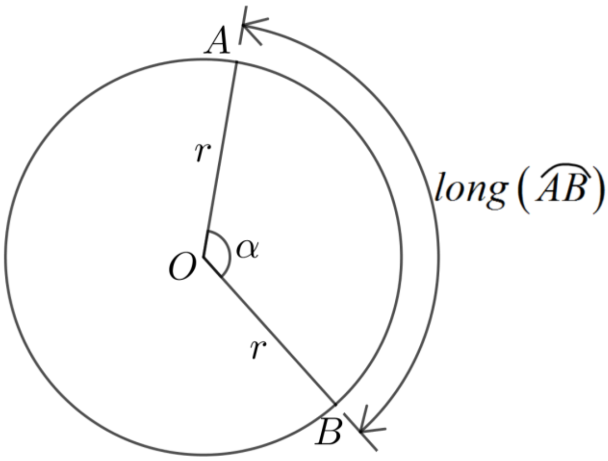
Si desde un punto exterior se trazan dos tangentes a una misma circunferencia, los segmentos comprendidos entre los puntos de tangencia y el punto exterior tienen igual medida.



$$AP = PB$$

1.2.1.5 Longitud de arco

En una circunferencia de radio r un ángulo central α (en grados sexagesimales) correspondiente al arco AB determina una longitud de dicho arco ($long\left(\widehat{AB}\right)$) que se calcula como sigue:



$$long\left(\widehat{AB}\right) = \frac{\pi r \alpha}{180°}$$

NOTA: Si la medida del ángulo central de α es en radianes, entonces:

$$long\left(\widehat{AB}\right) = \alpha r$$

1.3 Circunferencias y Polígonos

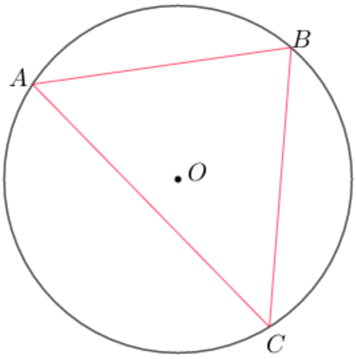
1.3.1 Polígonos inscritos en una circunferencia

Decimos que un polígono está inscrito en una circunferencia cuando sus vértices son puntos de la circunferencia y, en consecuencias sus lados son cuerdas de esta circunferencia.

En este caso, se puede decir también que la circunferencia es **circunscrita** al polígono.

Ejemplo:

El triángulo ABC de la figura está inscrito en la circunferencia



$OA = OB = OC = R$

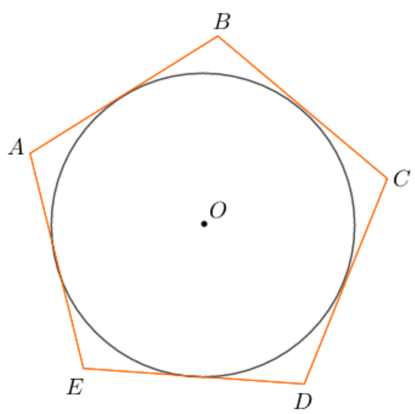
R : radio de la circunferencia circunscrita al polígono ABC, o simplemente, radio del polígono ABC.

1.3.2 Polígonos circunscritos a una circunferencia

Llamamos polígono circunscrito a una circunferencia a aquel polígono cuyos lados son tangentes a la circunferencia. La distancia del centro O a cada uno de los lados es el radio r de la circunferencia inscrita.

Ejemplo:

El pentágono $ABCDE$ de la figura está circunscrito a la circunferencia. También podemos decir que la circunferencia está inscrita en el polígono $ABCDE$.



1.3.2.1 Polígonos regulares inscritos y/o circunscritos a una circunferencia

Todo polígono regular puede ser inscrito y circunscrito en dos circunferencias concéntricas (una inscrita y otra circunscrita).

Casos particulares

Sean:

L_n : lado del polígono regular de n lados.

R : radio del polígono regular (o radio de la circunferencia circunscrita al polígono regular).

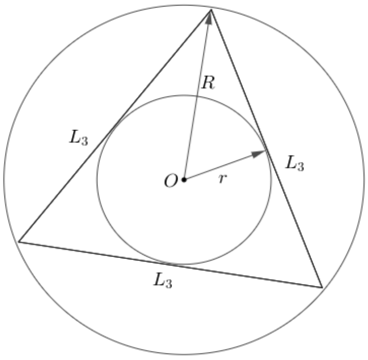
r : apotema o radio de la circunferencia inscrita en el polígono regular. (Es importante recordar que la apotema es perpendicular al lado).

1) **Triángulo equilátero**

$$L_3 = R\sqrt{3}$$

$$r = \frac{h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} L_3 \text{ es decir,}$$

$$L_3 = 2\sqrt{3}r$$

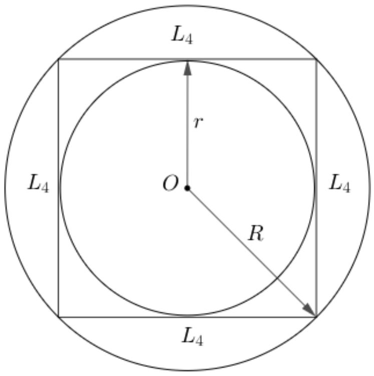


Observación: $R = \frac{2}{3}h$ donde h es la altura del triángulo equilátero

2) **Cuadrado**

$$L_4 = \sqrt{2}R$$

$$L_4 = 2r$$

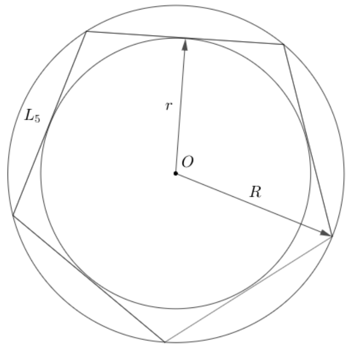


Observación: $d = 2R$ donde d es la diagonal del cuadrado.

3) **Pentágono regular**

$$L_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

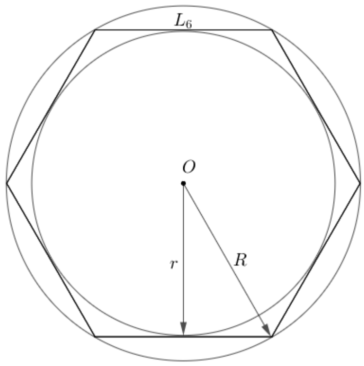
$$r^2 = R^2 - \left(\frac{L_5}{2}\right)^2$$



4) **Hexágono regular**

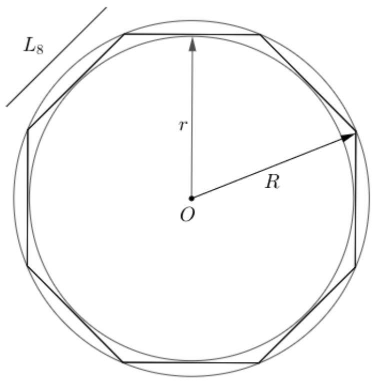
$$L_6 = R$$

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{L_6}{2}\right)^2$$



Observación: Al unir el centro del hexágono regular con todos los vértices, se forman 6 triángulos equiláteros iguales entre sí.

5) **Octágono regular**



$$L_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{L_8}{2}\right)^2$$

6) **Decágono regular**

$$L_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{L_{10}}{2}\right)^2$$

7) **Dodecágono regular**

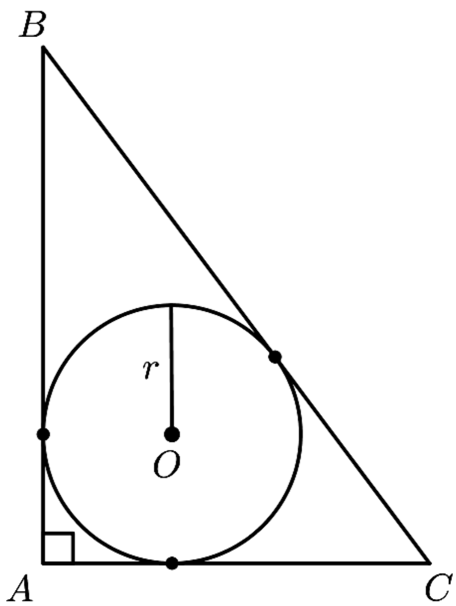
$$L_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{L_{12}}{2}\right)^2$$

1.4 Algunos casos importantes de polígonos inscriptos a una circunferencia o circunscriptos a una circunferencia

1.4.1 Teorema de Poncelet

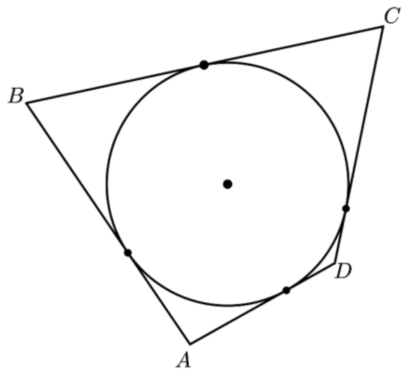
En todo triángulo rectángulo: la suma de las longitudes de los catetos es igual a la longitud de la hipotenusa más el doble del radio de la circunferencia inscrita.



$$AB + AC = BC + 2r$$

1.4.2 Teorema de Pitot

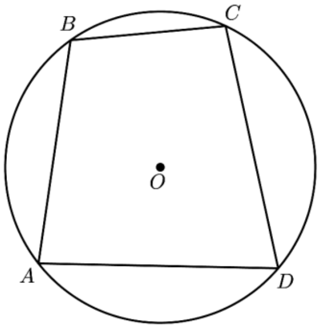
En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia se cumple que 2 lados opuestos suman igual que los otros 2.



$$AD + BC = AB + DC$$

1.4.3 Cuadrilátero inscripto

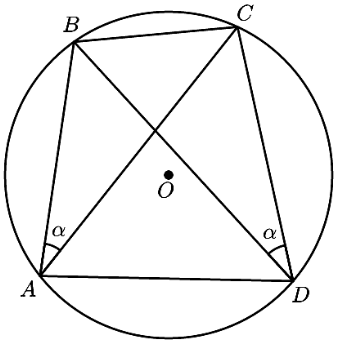
También llamado cuadrilátero cíclico, es aquel que tiene sus cuatro vértices sobre la misma circunferencia.



Propiedades

i) Las medidas de dos ángulos opuestos suman 180^0.

ii) Las diagonales forman ángulos que tienen igual medida con los lados opuestos.

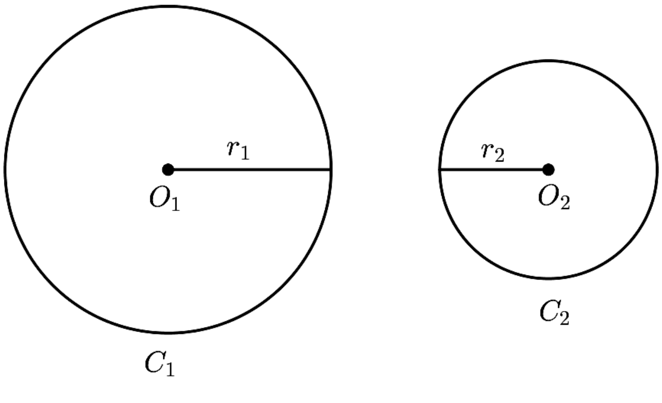


1.5 Posiciones relativas de dos circunferencias

1.5.1 Circunferencias exteriores

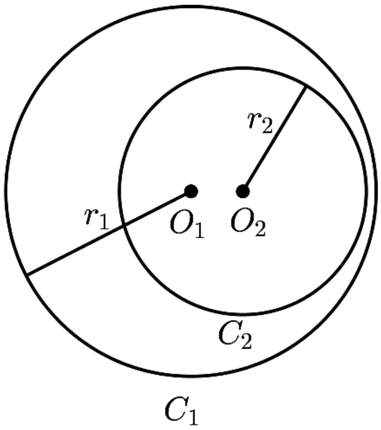
Las circunferencias C_1 y C_2 son exteriores si $O_1O_2 > r_1 + r_2$.

Observación: O_1O_2 es la distancia entre los centros.



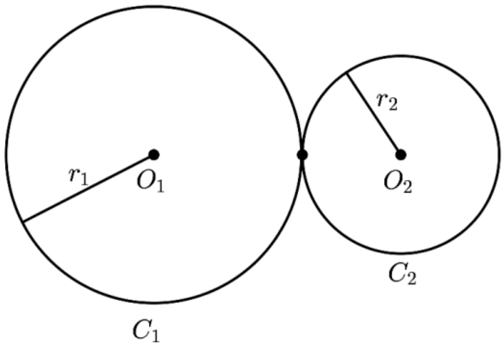
1.5.2 Circunferencias interiores

Las circunferencias C_1 y C_2 son interiores si $O_1O_2 < r_1 - r_2$.



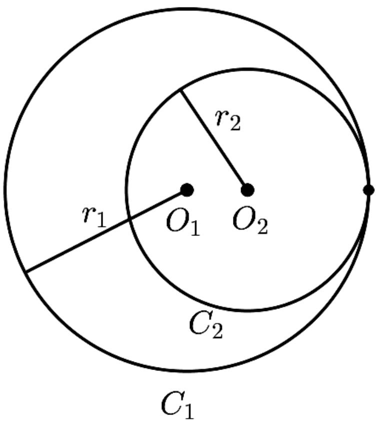
1.5.3 Circunferencias tangentes exteriores o exteriormente

Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes exteriores o exteriormente si $O_1O_2 = r_1 + r_2$.



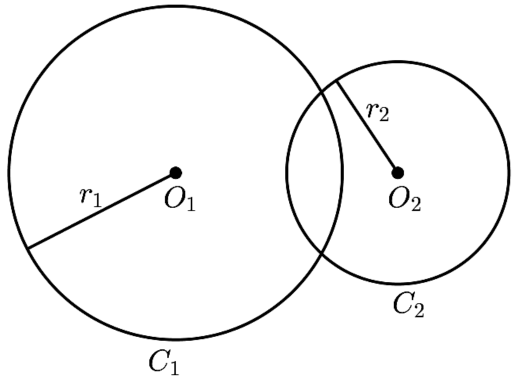
1.5.4 Circunferencias tangentes interiores o interiormente

Las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes interiores o interiormente si $O_1O_2 = r_1 - r_2$.



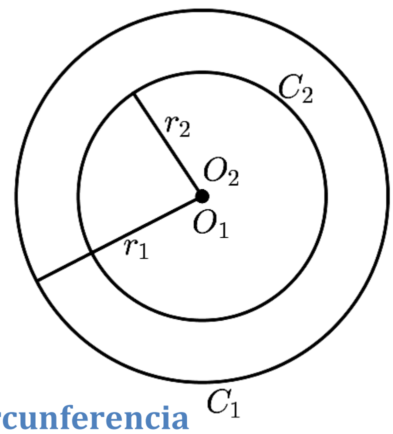
1.5.5 Circunferencias secantes

Las circunferencias C_1 y C_2 son secantes si $r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_2 + r_1$.



1.5.6 Circunferencias concéntricas

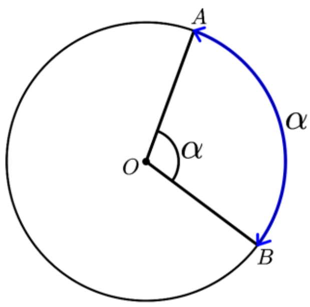
Las circunferencias C_1 y C_2 son concéntricas si $O_1O_2 = 0$.



1.6 Ángulos en la circunferencia

1.6.1 Ángulo Central:

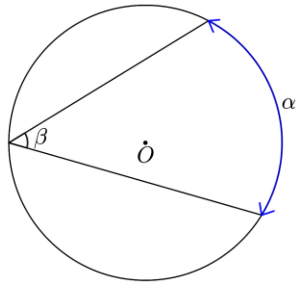
El vértice se encuentra en el centro de la circunferencia, sus lados son dos radios. La medida del ángulo central es igual a la medida del arco comprendido entre sus lados.



$$m\widehat{AB} = \alpha$$

1.6.2 Ángulo Inscrito:

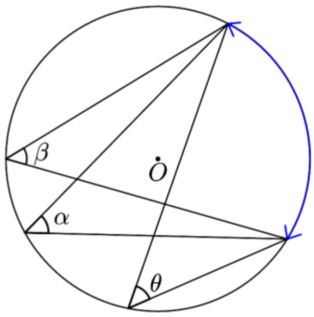
El vértice es un punto de la circunferencia, sus lados son dos cuerdas. La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco comprendido entre sus lados.



$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

<u>Corolario I</u>

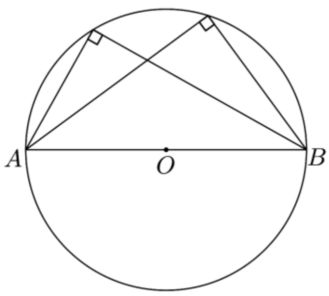
Todos los ángulos inscritos en un mismo arco tienen igual medida.



$$\alpha = \beta = \theta$$

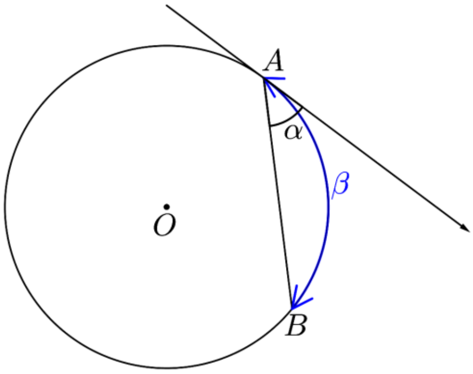
<u>Corolario II</u>

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es ángulo recto.



1.6.3 Ángulo Semi – Inscrito

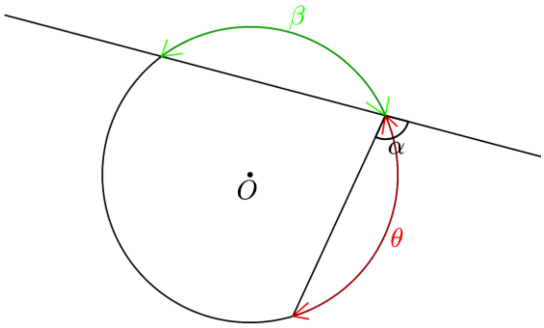
Su vértice se encuentra en la circunferencia, un lado es una tangente y el otro contiene una cuerda. Su medida es igual a la mitad de la medida del arco que subtienden sus lados.



$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

1.6.4 Ángulo Ex-inscrito

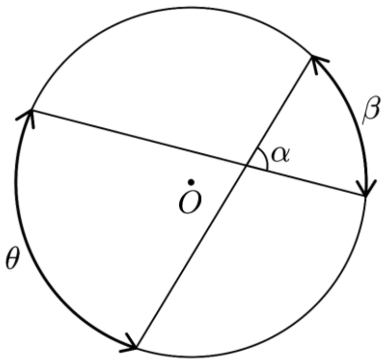
Es el suplemento de un ángulo inscrito, su vértice se encuentra en la circunferencia, un lado contiene una cuerda y el otro lado la parte exterior de una secante y su medida es igual a la mitad de la medida de todo el arco que no corresponde al ángulo inscrito.



$$\alpha = \frac{\theta + \beta}{2}$$

1.6.5 Ángulo Interior

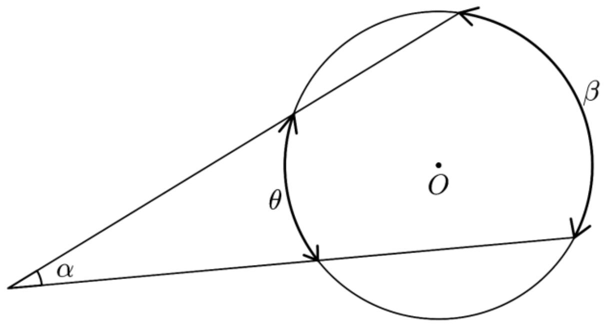
Su vértice se encuentra en el interior de la circunferencia, está formado por dos secantes que contienen dos cuerdas que se cortan y su medida es igual a la semi suma de los arcos interceptados por él y por su opuesto por el vértice.



$$\alpha = \frac{\theta + \beta}{2}$$

1.6.6 Ángulo Exterior

Su vértice se encuentra en el exterior de la circunferencia, pudiendo ser sus lados dos secantes, una secante y una tangente o dos tangentes. En éste último caso se llama ángulo circunscrito. La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos que subtienden sus lados.



$$\alpha = \frac{\beta - \theta}{2}$$

1.7 Áreas de figuras planas

1.7.1 Definición de área

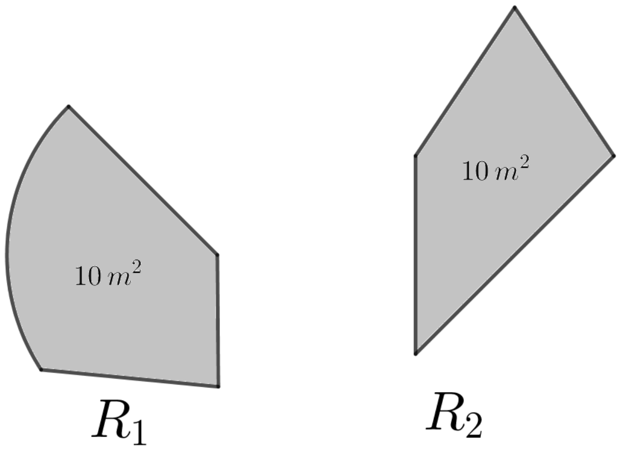
Es un número positivo único que indica la medida de una superficie.

Son unidades de área: $m^2, cm^2, ..., etc$ o simplemente u^2 (unidades cuadradas).

1.7.2 Figuras Equivalentes

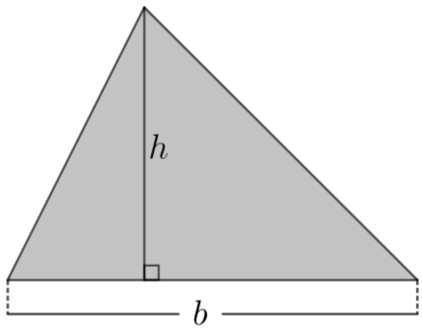
Dos regiones cualesquiera que tienen igual área se llaman equivalentes, independiente de la forma que tenga cada región.

En la figura, R_1 y R_2 son regiones equivalentes.



1.7.3 Área de un triángulo

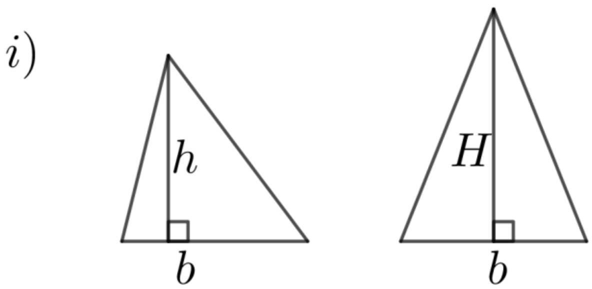
El área de todo triángulo es igual al semiproducto de la longitud de un lado y la altura relativa a dicho lado.



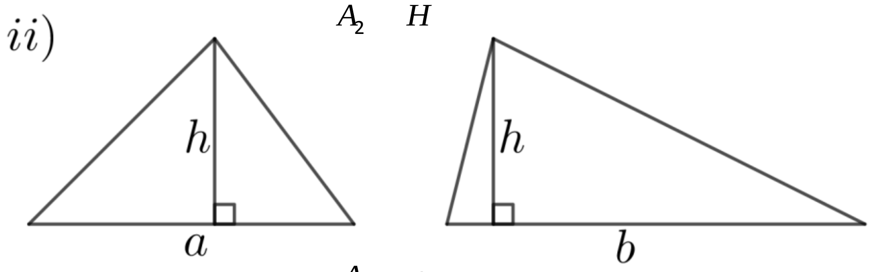
$$A(\Delta ABC) = \frac{b \times h}{2}$$

1.7.3.1 Propiedades.

a) Si dos triángulos tienen igual base, sus áreas son proporcionales a sus respectivas alturas. Además, si tienen igual altura sus áreas son proporcionales a sus respectivas bases.

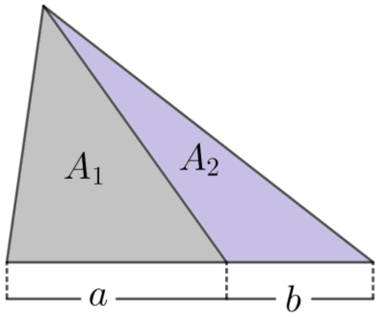


$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{h}{H}$$



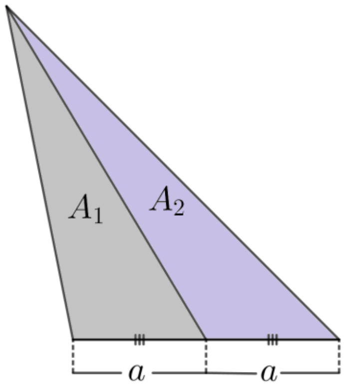
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a}{b}$$

b) Relación de áreas al trazar un segmento interior.



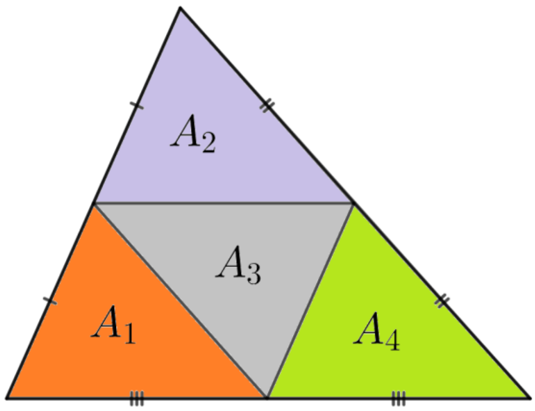
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a}{b}$$

c) En todo triángulo, una mediana cualesquiera determina dos triángulos parciales equivalentes.



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a}{a} = 1 \Leftrightarrow A_1 = A_2$$

d) En todo triángulo, al unir los puntos medios de los tres lados, se determinan cuatro triángulos parciales equivalentes.

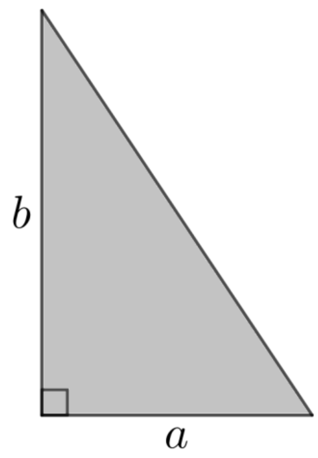


$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$$

1.7.3.2 Casos especiales

a) **Área de un triángulo rectángulo.**

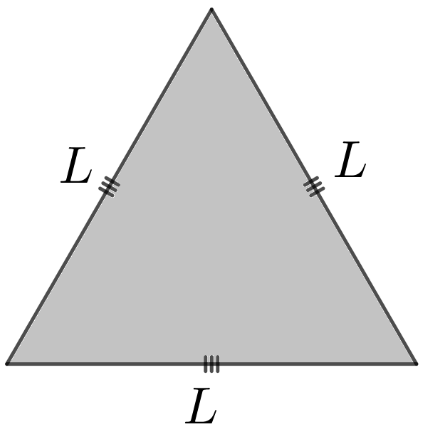
El área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de las longitudes de los catetos.



$$A = \frac{a \times b}{2}$$

b) **Área de un triángulo equilátero.**

El área de todo de triángulo equilátero es igual al cuadrado de la longitud del lado multiplicado por el factor $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

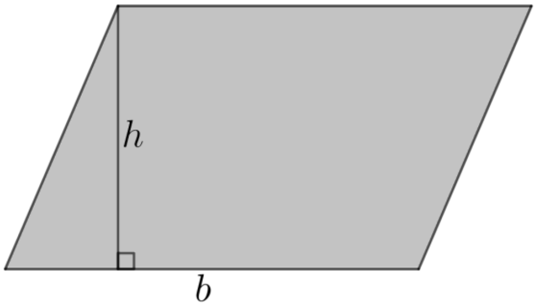


$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times L^2$$

1.7.4 Área de cuadriláteros

1.7.4.1 Área de un paralelogramo

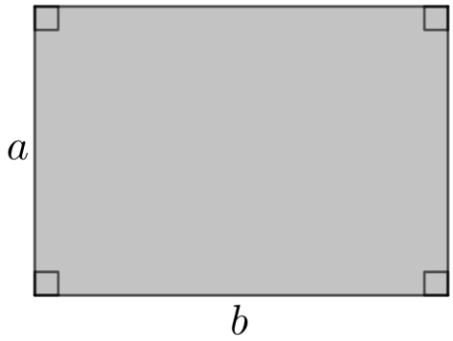
El área de todo paralelogramo es igual al producto de la longitud de un lado y la altura relativa a dicho lado.



$$A = b \times h$$

1.7.4.2 Área de un rectángulo

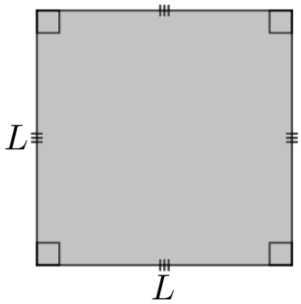
El área de todo rectángulo es igual al producto de sus dos longitudes.



$$A = a \times b$$

1.7.4.3 Área de un cuadrado

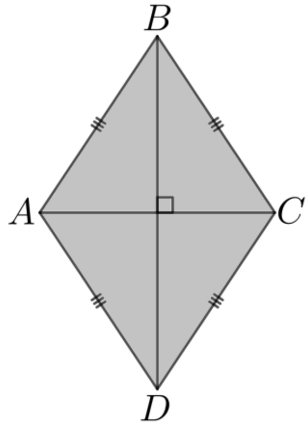
El área de una región cuadrada, se expresa por el cuadrado de la longitud de su lado.



$$A = L^2$$

1.7.4.4 Área de un rombo

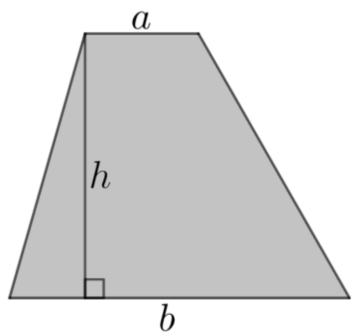
El área de todo rombo es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales.



$$A=\frac{AC\times BD}{2}$$

1.7.4.5 Área de un trapecio

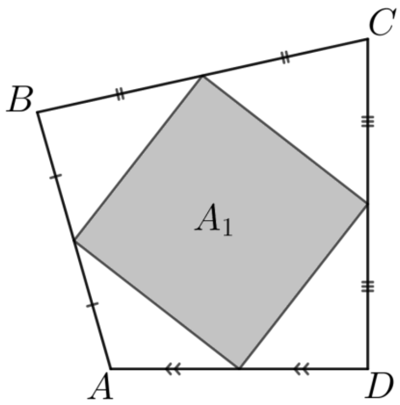
El área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de las longitudes de las bases y de la altura.



$$A=\left(\frac{a+b}{2}\right)\times h$$

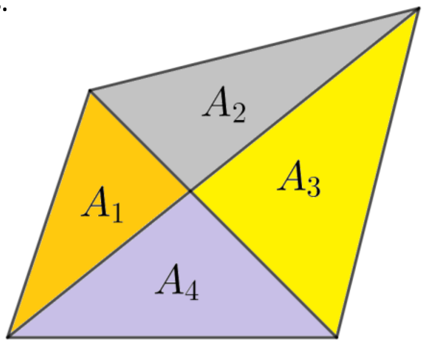
1.7.4.6 Propiedades de áreas de regiones cuadrangulares

a) En todo cuadrilátero convexo se cumple, que al unir los puntos medios de sus lados se forma un paralelogramo; cuya área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.



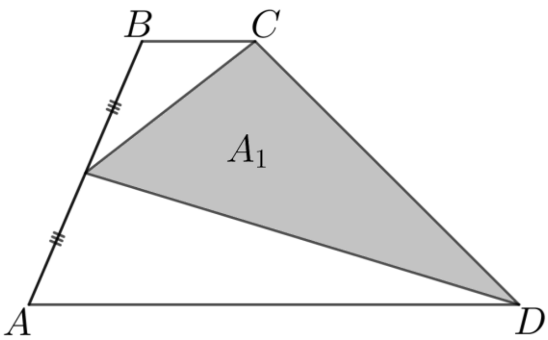
$$A_1 = \frac{Área(ABCD)}{2}$$

b) Si en un cuadrilátero convexo se trazan las diagonales se determina cuatro triángulos parciales y se cumple que los productos de las áreas de los triángulos opuestos son iguales.



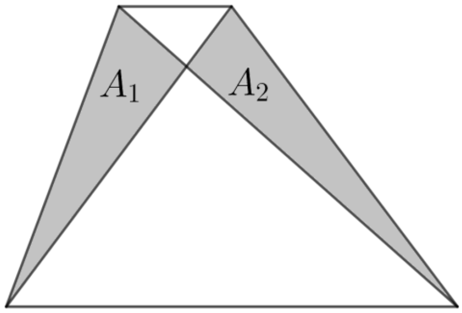
$$A_1 \times A_3 = A_2 \times A_4$$

c) Si se une el punto medio de un lado no paralelo de un trapecio con los extremos del otro lado no paralelo, se forma un triángulo cuya área es igual a la mitad del área del trapecio.



$$A_1 = \frac{Área(ABCD)}{2}$$

d) En todo trapecio, las áreas de los triángulos laterales determinados al trazar las dos diagonales, son iguales. Es decir dichos triángulos son equivalentes.

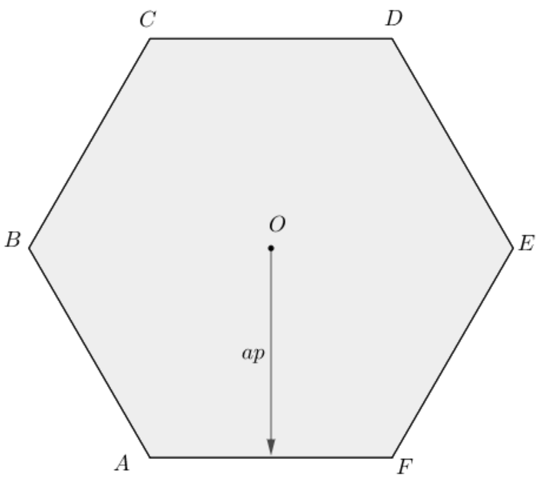


$$A_1 = A_2$$

1.7.5 Área de polígonos regulares

El área de un polígono regular es igual al semiproducto de su perímetro y apotema.

Ejemplo:



$$A = \frac{P \times ap}{2}$$

donde

$$P = AB + BC + CD + DE + EF + FA$$

1.7.6 Área de polígonos de más de cuatro lados

Cuando se desea calcular áreas de figuras más complejas, en general, es conveniente descomponerlo en figuras más sencillas.

1.7.7 Áreas de figuras circulares

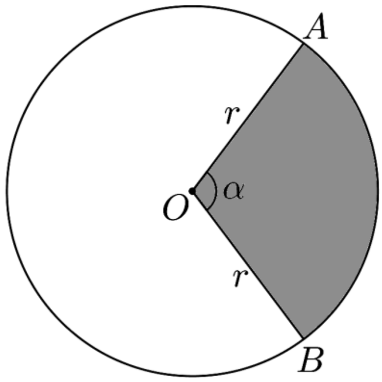
1.7.7.1 Sector Circular

Es la porción del círculo limitada por dos radios

TEOREMA

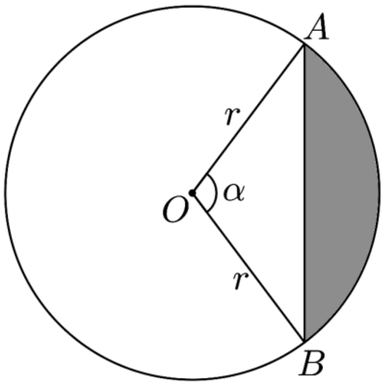
El área del sector circular de radio r y ángulo central α es: $A_{\text{sector circular}} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360^0}$ o bien

$$A_{\text{sector circular}} = \frac{r^2\alpha}{2}, \ \alpha \text{ en radianes.}$$



1.7.7.2 Segmento Circular

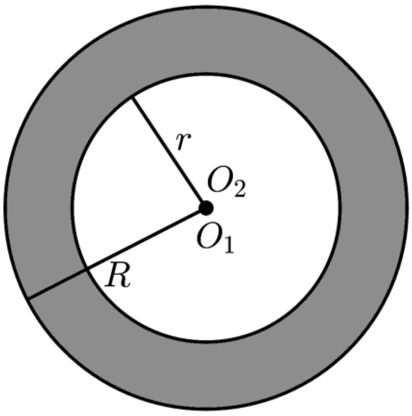
Es la porción del círculo limitada por una cuerda y su respectivo arco.



$$A_{\text{segmento circular}} = \frac{r^2}{2}(\alpha - sen\,\alpha)$$; donde α en radianes.

1.7.7.3 Corona Circular

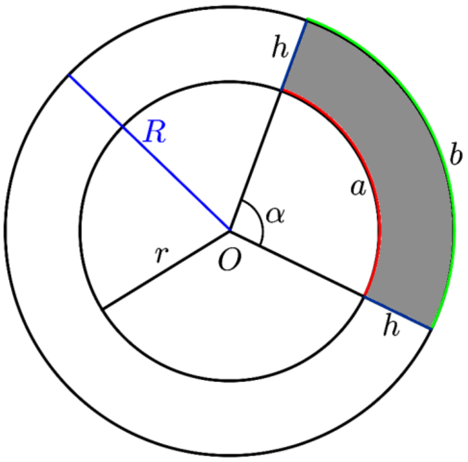
Se llama así a la región del plano exterior a la menor de dos circunferencias concéntricas e interior a la mayor.



$$A_{\text{corona circular}} = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

1.7.7.4 Trapecio Circular

Es la porción de una corona circular.

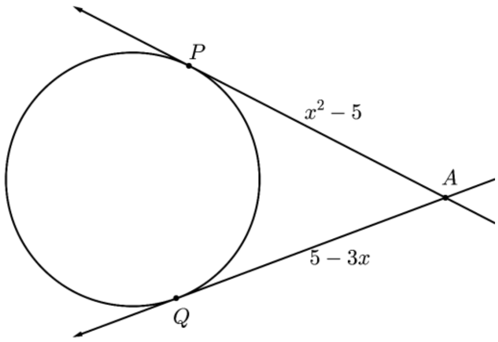


$$A_{\text{Trapecio circular}} = \frac{\pi\,\alpha}{360^0}\left(R^2 - r^2\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)\times h$$

$$\alpha = \frac{b-a}{h}, \quad \alpha \text{ en radianes.}$$

2 Ejercicios resueltos

1. En la figura de abajo, P y Q son puntos de tangencia, la medida del segmento AQ, es igual a:



Resolución

Como P y Q son puntos de tangencia, entonces por el Teorema de las dos tangentes tenemos que:

$$AQ = AP \Leftrightarrow x^2 - 5 = 5 - 3x$$

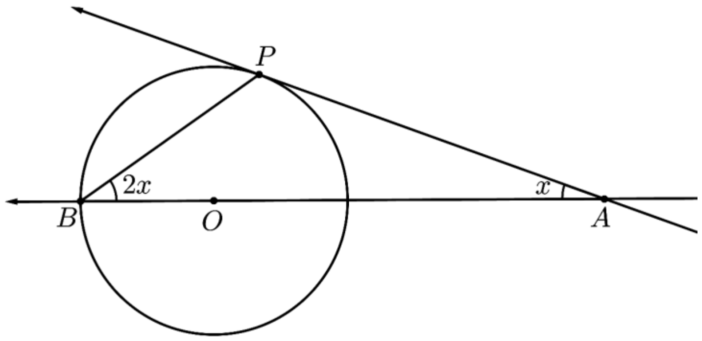
O equivalentemente,

$$\begin{aligned} &x^2 + 3x - 10 = 0 \\ &(x+5)(x-2) = 0 \\ &x = -5 \quad o \quad x = 2 \end{aligned}$$

Si $x = 2$ entonces $AP = x^2 - 5 = (2)^2 - 5 = -1$, de aquí $x \neq 2$ porque $AP > 0$.

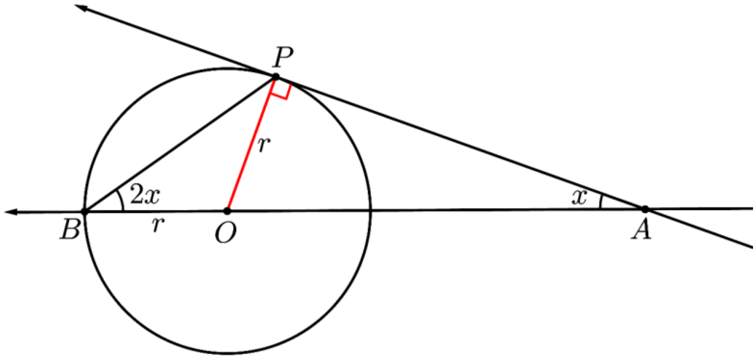
Si $x = -5$ entonces $AP = x^2 - 5 = (-5)^2 - 5 = 20 = AQ$, de aquí $AQ = 20$.

2. En la figura de abajo, O es el centro de la circunferencia y P es punto de tangencia, el valor de x, es igual a:

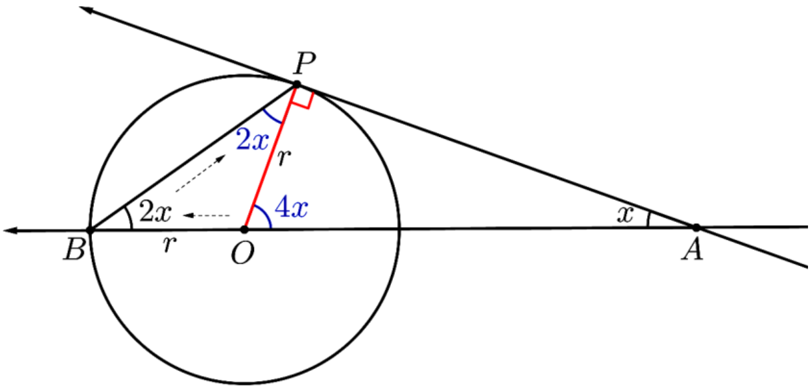


Resolución

Como P es punto de tangencia, entonces trazamos el segmento OP cuya longitud es el radio r de la circunferencia, entonces por el Teorema del radio y la tangente tenemos que OP es perpendicular a la tangente dada:



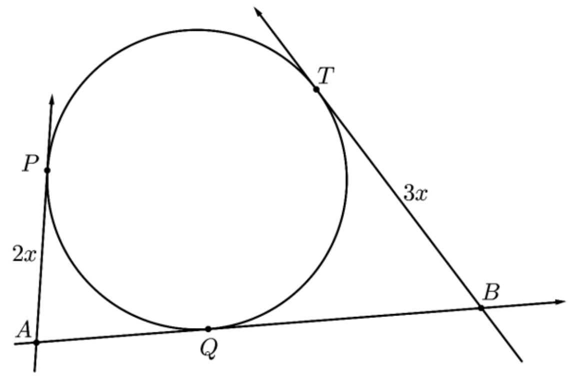
De aquí, el triángulo OBP es isósceles, y el ángulo exterior del mismo correspondiente al vértice O, mide $4x$. Esto es:



De esta forma, en el triángulo rectángulo OPA, tenemos que:

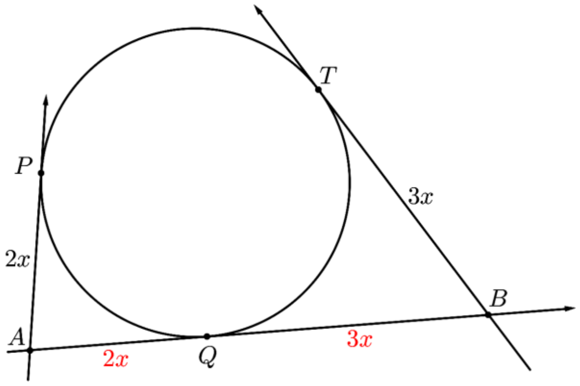
$$90^{o} + 4x + x = 180^{o} \Rightarrow x = 18^{o}.$$

3. En la figura de abajo, P, Q y T son puntos de tangencia y $AB = 25$, el valor de x es igual a:



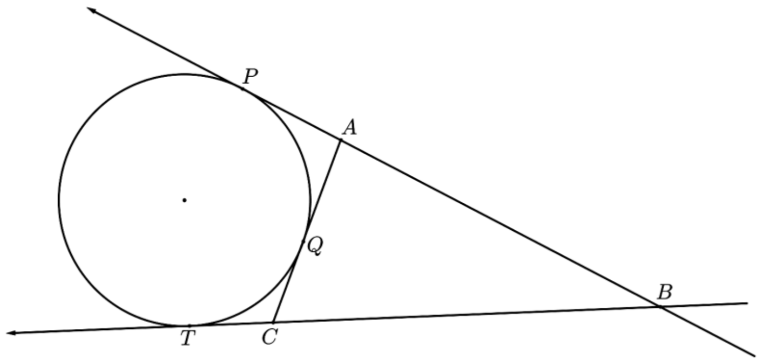
Resolución

Como P, Q y T son puntos de tangencia, entonces por el Teorema de las dos tangentes, sabemos que $AP = AQ = 2x$ y $BQ = BT = 3x$, esto es:



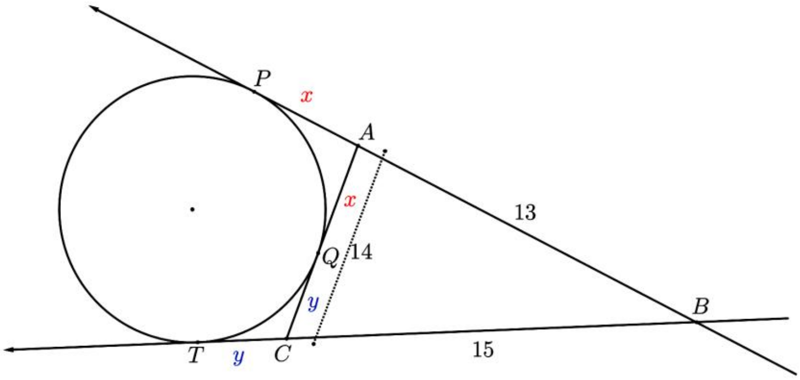
De aquí, $AB = 25 = 2x + 3x \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = 5$.

4. En la figura de abajo, P, Q y T son puntos de tangencia. Si $AB = 13$, $BC = 15$ y $AC = 14$, el valor de $AQ - QC$ es igual a:

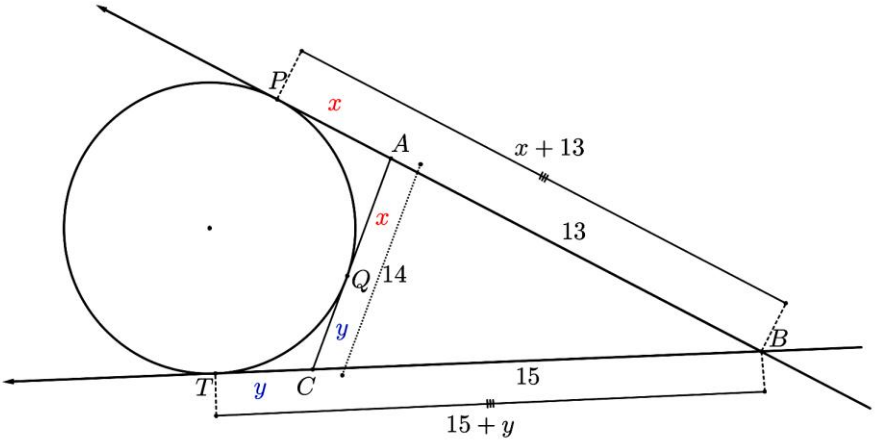


Resolución

Sean $AQ = x$ y $QC = y$, entonces por Teorema de las dos tangentes tenemos que $AP = AQ = x$ y $QC = CT = y$, esto es:

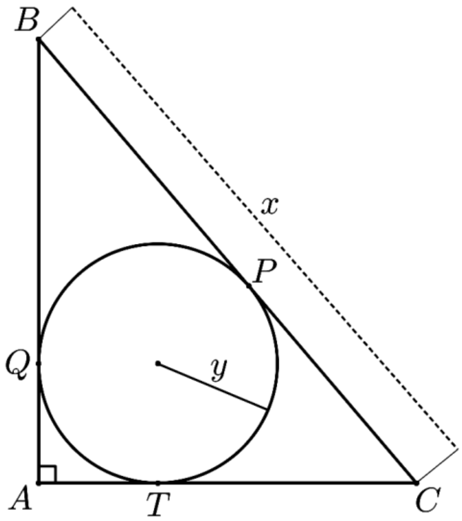


Además, nuevamente por el Teorema de las dos tangentes, $BP = BT$.



Entonces, $BP = BT \Rightarrow x + 13 = y + 15$, de aquí $x - y = 15 - 13 = 2$.

5. En la figura de abajo, P, Q y T son puntos de tangencia. Si $AB = 12$ y $AC = 5$, el valor de $x + y$ es igual a:



Resolución

Como P, Q y T son puntos de tangencia, por el Teorema de Poncelet tenemos que:

$$AB + AC = BC + 2y \Leftrightarrow 12 + 5 = x + 2y$$
$$\Rightarrow x + 2y = 17 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Y por el Teorema de Pitágoras:

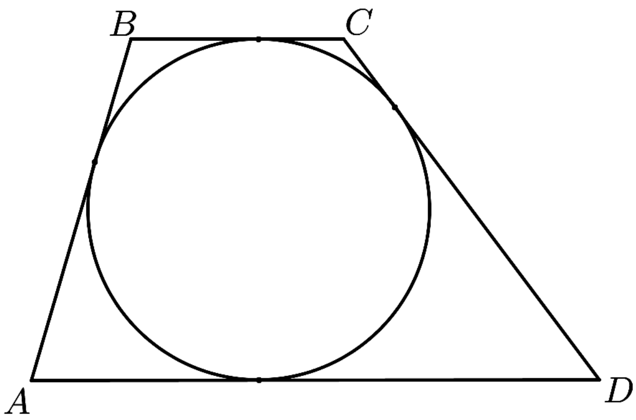
$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \Leftrightarrow 12^2 + 5^2 = x^2$$
$$\Rightarrow x = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos que:

$$x + 2y = 13 + 2y = 17 \Rightarrow y = 2.$$

De esta manera, $x + y = 13 + 2 = 15$.

6. En la figura de abajo, la medida de la base media del trapecio $ABCD$ es igual a 15 unidades. El perímetro del trapecio es igual a:



Resolución

Como el trapecio $ABCD$ está circunscripto a una circunferencia, por el Teorema de Pitot, tenemos que:

$$AD + BC = AB + CD$$

Además, al ser la longitud de la base media del trapecio igual a 15 unidades, entonces:

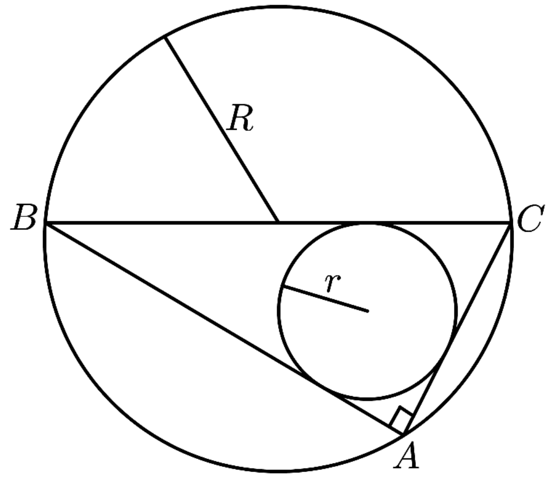
$$\frac{AD + BC}{2} = 15 \Rightarrow AD + BC = 30,$$

De aquí, $AD + BC = AB + CD = 30$ unidades.

De esta forma, el perímetro del trapecio es igual a:

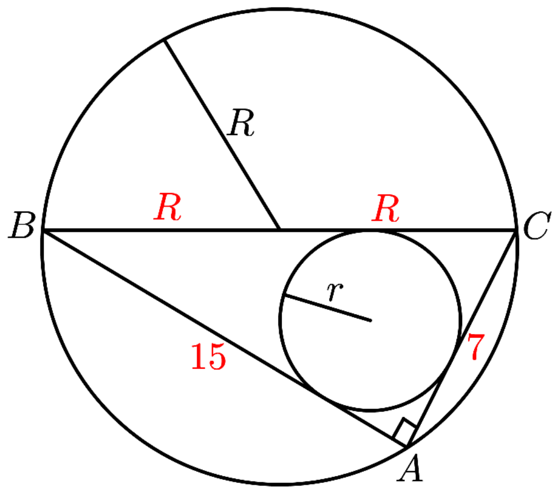
$$P = AD + BC + AB + CD = (AD + BC) + (AB + CD) = 30 + 30 = 60.$$

7. En la figura de abajo, $AB = 15$ y $AC = 7$ entonces el valor de $R - r$ es igual a:



Resolución

En el triángulo rectángulo ABC la longitud de la hipotenusa BC es igual a $2R$ esto es:



Aplicando el Teorema de Poncelet en el triángulo rectángulo ABC tenemos que:

$$AB + AC = BC + 2r \Rightarrow 15 + 7 = 2R + 2r$$
$$\Rightarrow 22 = 2(R + r) \Rightarrow R + r = 11.$$

8. Los diámetros de dos circunferencias situadas en el mismo plano miden $14\,m$ y $6\,m$. Si la distancia entre sus centros es $10\,m$, las posiciones relativas de las circunferencias son:

Resolución

Sean C_1 y C_2 las circunferencias de radios r_1 y r_2, respectivamente. Como los diámetros de las circunferencias miden $14\,m$ y $6\,m$, entonces:

$$2r_1 = 14\,m \Rightarrow r_1 = 7\,m$$
$$2r_2 = 6\,m \Rightarrow r_2 = 3\,m$$

Además, sean O_1 y O_2 centros de las circunferencias C_1 y C_2, respectivamente, de aquí, como $O_1O_2 = 7m + 3m = 10m = r_1 + r_2$, las circunferencias son tangentes exteriormente.

9. Las longitudes de dos circunferencias situadas en el mismo plano están en relación 7 a 3 y su suma es igual a 20π. Si la distancia entre sus centros es dos veces la diferencia de las longitudes de sus radios, las posiciones de las circunferencias son:

Resolución

Sean C_1 y C_2 las circunferencias de radios r_1 y r_2, respectivamente. Como las longitudes P_1 y P_2 de las circunferencias están en relación 7 a 3 y su suma es igual a 20π, entonces:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{7}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{7}{3} r_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$P_1 + P_2 = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 20\pi \Rightarrow r_1 + r_2 = 10 \ldots (2)$$

A continuación, sustituyendo (1) en (2) tenemos que:

$$r_1 + r_2 = \frac{7}{3} r_2 + r_2 = \frac{10}{3} r_2 = 10 \Rightarrow r_2 = 3 \ldots\ldots en\ (1)$$

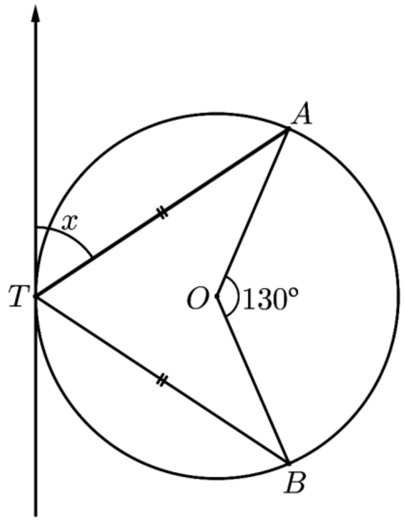
$$r_1 = \frac{7}{3} r_2 = \frac{7}{3} \times 3 = 7 .$$

Como:

$$4 = 7 - 3 = r_1 - r_2 < O_1O_2 = 2(7-3) = 8 < r_1 + r_2 = 7 + 3 = 10 ,$$

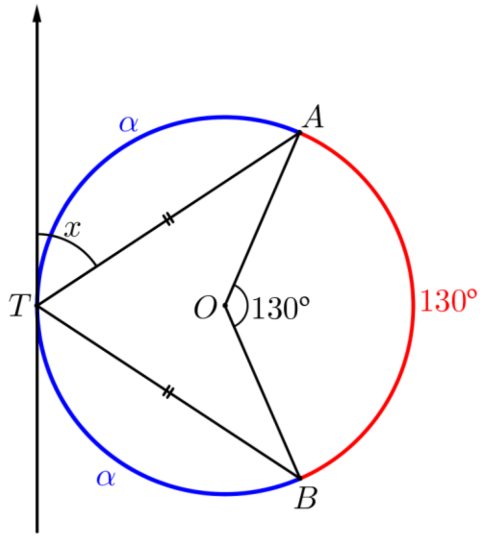
las circunferencias son secantes.

10. En la figura de abajo, T es punto de tangencia y $AT = TB$. Si O es el centro de la circunferencia, el valor de x es:



Resolución

Como $AT = TB$ entonces $m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{TB} = \alpha$ y además si O es el centro de la circunferencia entonces el ángulo 130^{o} es un ángulo central y de aquí $m\overset{\frown}{AB} = 130^{o}$

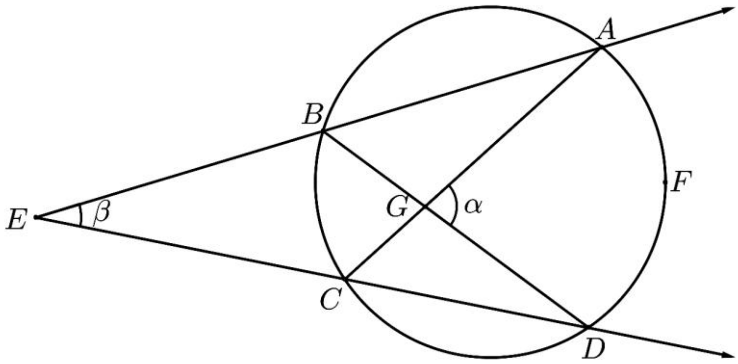


De la figura tenemos que:

$$\alpha + \alpha + 130^{\circ} = 360^{\circ} \Rightarrow \alpha = 115^{\circ}$$

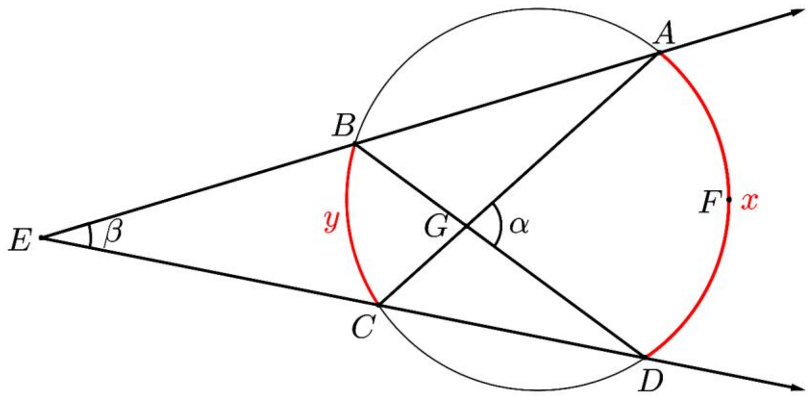
Como x es un ángulo semi-inscripto entonces $x = \dfrac{m\widehat{AT}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ de esta forma $x = \dfrac{115^{\circ}}{2} = 57^{\circ}30'$.

11. En la figura de abajo, $\alpha + \beta = 150^{\circ}$ entonces la medida de $\widehat{AFD}$ es igual a:



Resolución

Sean $m\widehat{AFD} = x$ y $m\widehat{BC} = y$ entonces,

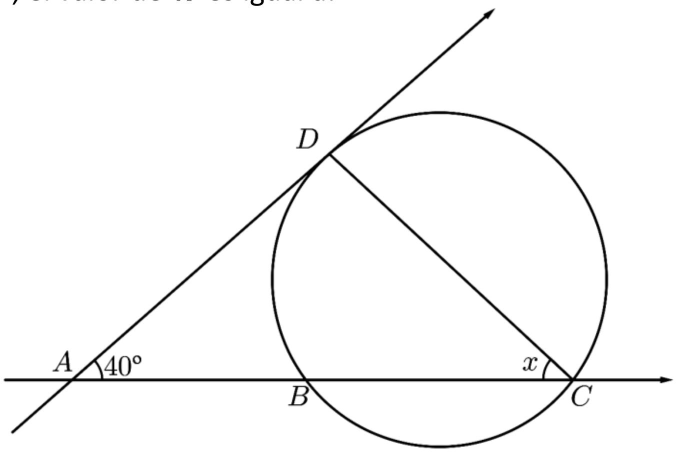


Como β es un ángulo exterior, entonces $\beta = \dfrac{x-y}{2}$. Además α es un ángulo interior lo que implica que $\alpha = \dfrac{x+y}{2}$.

De esta manera:

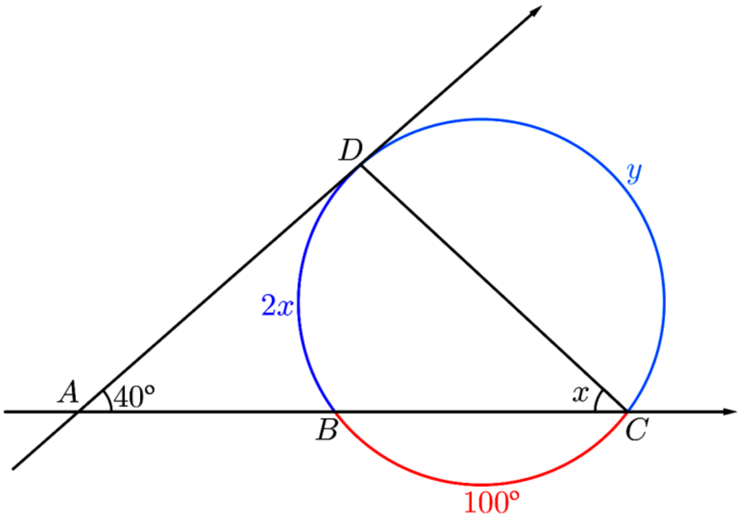
$$\alpha + \beta = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x = 150^{\circ}.$$

12. En la figura de abajo, D es punto de tangencia, la medida del arco BC es igual a 100°, el valor de x es igual a:



Resolución

Como x es un ángulo inscripto en la circunferencia, entonces $\frac{m\overset{\frown}{DB}}{2}=x$ o equivalentemente $m\overset{\frown}{DB}=2x$, y sea $m\overset{\frown}{CD}=y$, esto es:



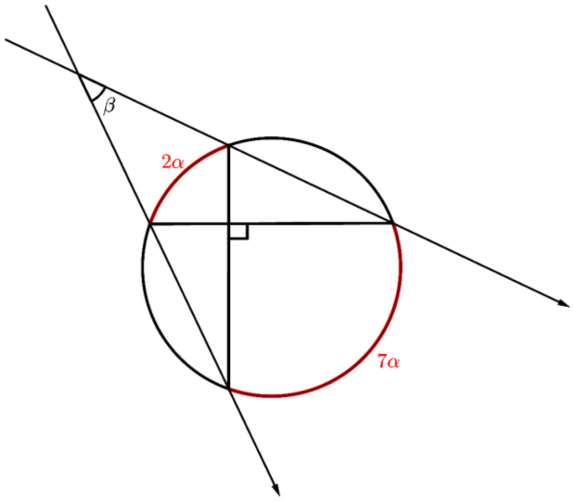
De aquí:

$$40^{\circ}=\frac{y-2x}{2}\Rightarrow y-2x=80^{\circ}......(1)$$
$$y+2x+100^{\circ}=360^{\circ}\Rightarrow y+2x=260^{\circ}....(2)$$

Haciendo (2)-(1) tenemos que:

$$4x=180^{\circ}\Rightarrow x=45^{\circ}.$$

13. En la figura de abajo, el valor de $\alpha+\beta$ es igual a:



Resolución

Como en la figura β es un ángulo exterior a la circunferencia, entonces

$$\beta=\frac{7\alpha-2\alpha}{2}\Rightarrow\beta=\frac{5\alpha}{2}..........(1)$$

Además $90°$ es un ángulo interior en la circunferencia, de aquí:

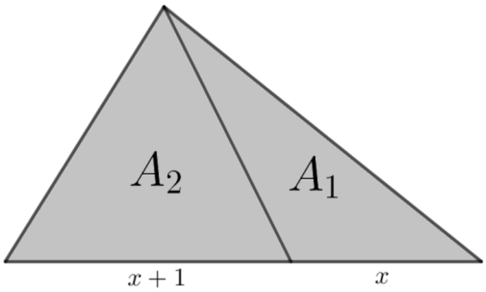
$$90°=\frac{7\alpha+2\alpha}{2}=\frac{9\alpha}{2}\Rightarrow\alpha=20°..........(2)$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos que:

$$\beta=\frac{5\alpha}{2}=\frac{5\times 20°}{2}=50°$$

De esta manera, $\alpha+\beta=20°+50°=70°$.

14. En la figura de abajo, $\frac{A_1}{A_2}=\frac{10}{17}$, el valor de es x igual a:

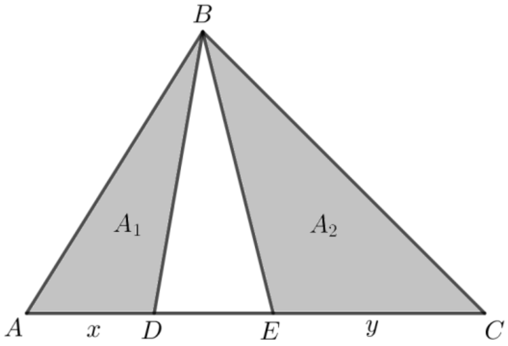


Resolución

Como en la figura $\frac{A_2}{A_1}=\frac{x+1}{x}$ o bien $\frac{A_1}{A_2}=\frac{x}{x+1}$, entonces

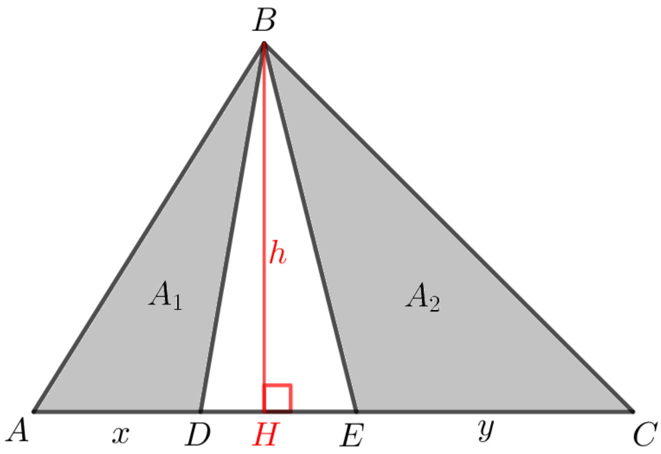
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{x}{x+1}=\frac{10}{17}\Rightarrow x=\frac{10}{7}.$$

15. En la figura de abajo, $A_1=16u^2$ y $A_2=32u^2$, el valor de $\frac{x}{y}$ es igual a:



Resolución

Primeramente vamos a trazar la altura $\overline{BH}$ del ΔABC, esto es:



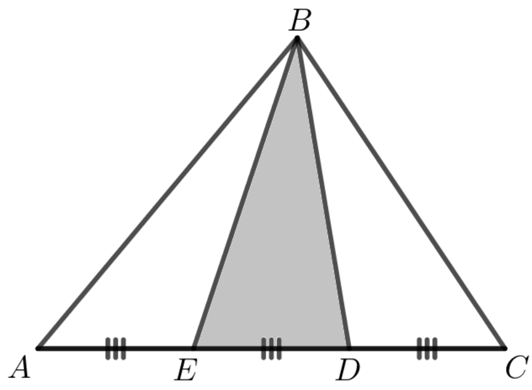
En la figura, $\overline{BH}$ es también es altura de los triángulos ABD y BCE, entonces:

$$A_1=\frac{x\times h}{2}=16u^2\Rightarrow x\times h=32u^2......(1)$$
$$A_1=\frac{y\times h}{2}=32u^2\Rightarrow y\times h=64u^2......(2)$$

De aquí, haciendo $(1)\div(2)$ tenemos que:

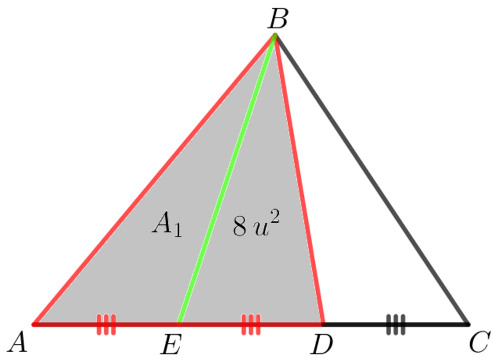
$$\frac{x\times h}{y\times h}=\frac{x}{y}=\frac{32u^2}{64u^2}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

16. En la figura de abajo, el área de la parte sombreada es igual a $8u^2$, el área del triángulo ABC es:



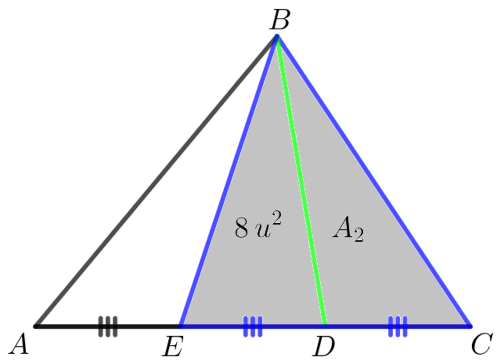
Resolución

En la figura, $AE=ED=DC$ entonces, en el ΔABD, $\overline{BE}$ es una mediana, por lo que:



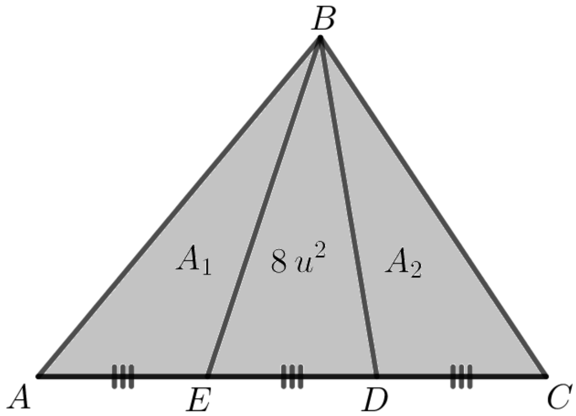
$A_1=8u^2$ puesto que $\overline{BE}$ divide al ΔABD en dos regiones equivalentes.

Y en el ΔEBC, $\overline{BD}$ es una mediana, entonces:



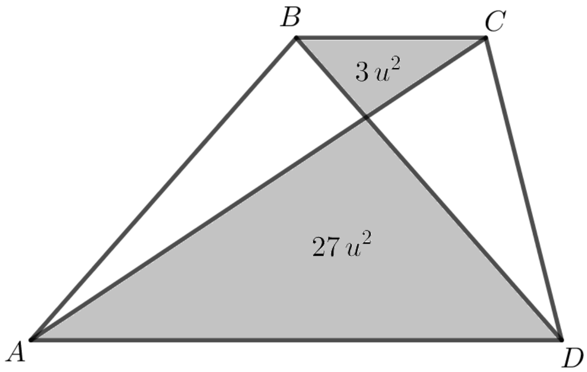
$A_2 = 8u^2$ puesto que $\overline{BD}$ divide al ΔEBC en dos regiones equivalentes.

De esta manera, el área A del triángulo ABC es igual a:



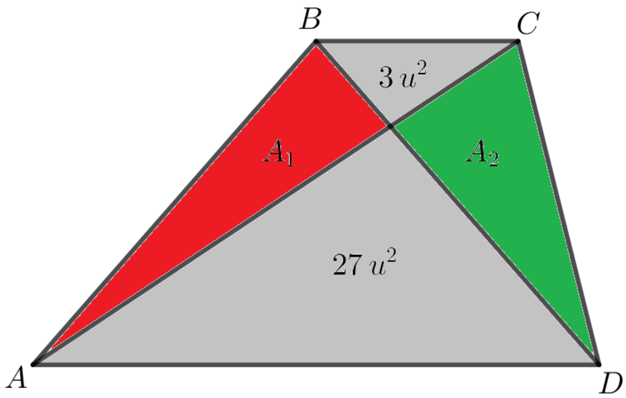
$$A = A_1 + 8u^2 + A_2 = 8u^2 + 8u^2 + 8u^2 = 24u^2$$

17. En la figura de abajo, el área del trapecio $ABCD$ es igual a:



Resolución

En la figura, primeramente definiremos las áreas triangulares que faltan para calcular el área total del trapecio por A_1 y A_2, es decir:



Por propiedad sabemos que:

$$A_1 = A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$A_1 \times A_2 = 27 \times 3 = 81 \ldots\ldots\ldots(2)$$

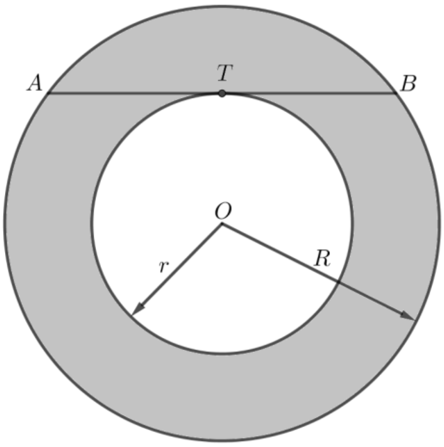
Reemplazando (1) en (2) tenemos que:

$$A_1 \times A_2 = A_1 \times A_1 = (A_1)^2 = 81 \Rightarrow A_1 = 9u^2$$
$$A_1 = A_2 = 9\,u^2$$

De esta manera, el área A del trapecio $ABCD$ es:

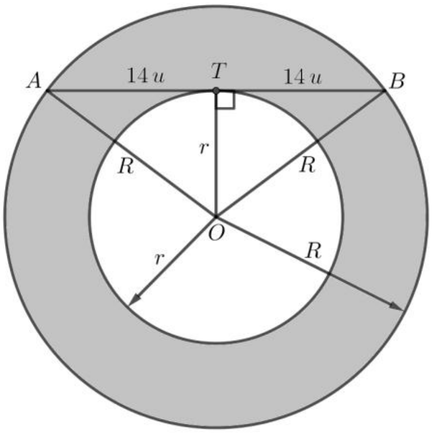
$$A = 3u^2 + 27u^2 + 9u^2 + 9u^2 = 48u^2.$$

18. En la figura de abajo, T es punto de tangencia y $AB = 28u$, el área de la parte sombreada, en u^2, es igual a:



Resolución

En la figura, el área de la parte sombreada corresponde al área de una corona circular, es decir, $A_{corona\ circular} = (R^2 - r^2)\pi$. Tracemos los segmentos OA y OB; en la circunferencia menor aplicamos el Teorema del radio y la tangente, puesto que T es punto de tangencia, entonces:

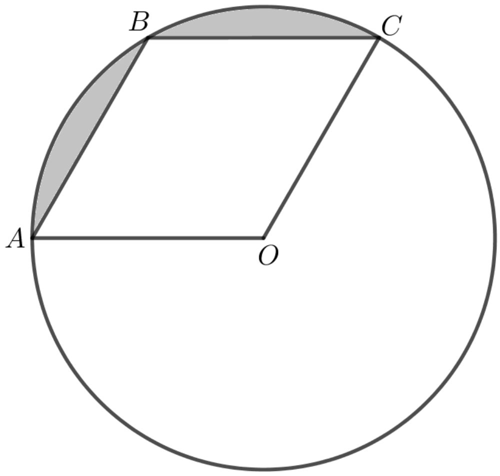


En la figura, $\overline{OT}$ es altura y mediana del triángulo ABO, y $AT = TB = 14u$ porque $AB = 28u$, por el Teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$R^2 = r^2 + 14^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 196$$

De esta manera, $A_{corona\ circular} = \left(R^2 - r^2\right)\pi = 196\pi$.

19. En la figura de abajo, O es el centro de la circunferencia y $ABCO$ es un rombo de perímetro igual a $16u$, el área de la parte sombreada, en u^2, es igual a:



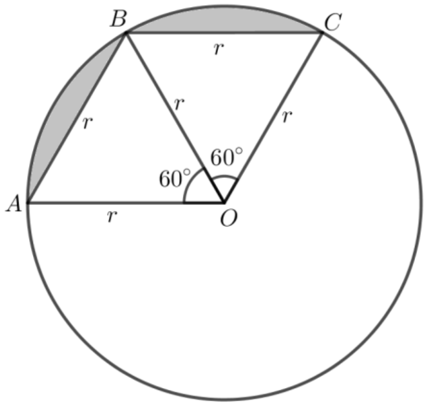
<u>Resolución</u>

En la figura, la longitud de cada lado del rombo $ABCO$ es igual al radio de la circunferencia, porque O es el centro, de aquí, $AB = BC = CO = OA = r$.

Como el perímetro del rombo $ABCO$ es igual a $16u$, entonces:

$$AB + BC + CO + OA = r + r + r + r = 4r = 16u \Rightarrow r = 4u$$

A continuación tracemos el segmento OB cuya longitud es r, esto es:

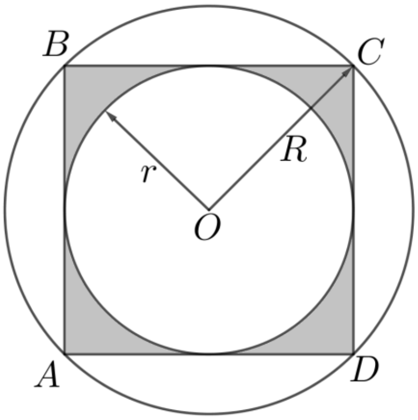


Entonces los triángulos ABO y BCO son iguales, esto implica que los segmentos circulares de la parte sombreada son iguales y por lo tanto equivalentes. De esta forma el área de la parte sombreada es:

$$A = 2A_{segmento\ circular} = 2\times\frac{r^2}{2}(\alpha - sen\alpha) = r^2(\alpha - sen\alpha) = 4^2\left(\frac{\pi}{3} - sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

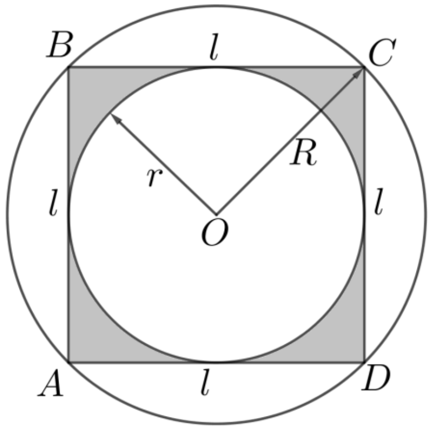
$$\Rightarrow A = 16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{8}{3}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

20. En la figura de abajo, $ABCD$ es un cuadrado inscripto y circunscrito a las circunferencias, el área de la parte sombreada en función a R, es igual a:



<u>Resolución</u>

Sea l la longitud de cada lado del cuadrado, esto es:



Como $ABCD$ es un cuadrado inscripto y circunscrito a las circunferencias, entonces por propiedad se cumple que:

$$l = 2r \quad \text{y} \quad l = \sqrt{2}R \;\Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

De la figura, el área de la parte sombreada es igual a la diferencia entre el área del cuadrado y el área de la región circular formada por la circunferencia inscripta en el cuadrado, es decir:

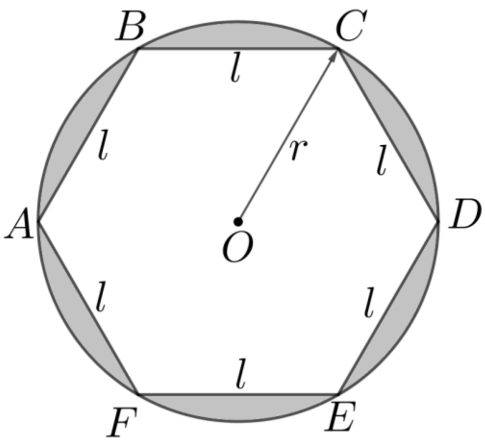
$$A_{parte\ sombreada} = l^2 - \pi r^2$$

A continuación en función a R, es:

$$A_{parte\ sombreada} = l^2 - \pi r^2 = \left(\sqrt{2}R\right)^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2 = R^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A_{parte\ sombreada} = R^2\left(\frac{4-\pi}{2}\right).$$

21. En la figura de abajo, $ABCDEF$ es un hexágono regular de lado l inscripto en una circunferencia, el área de la parte sombreada en función a l, es igual a:

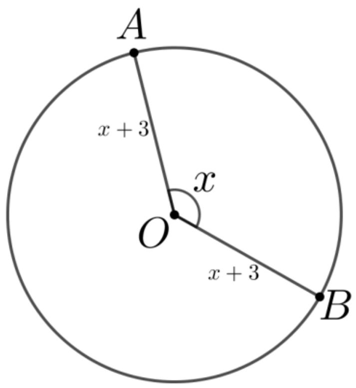


Resolución

Como el hexágono regular está inscripto en la circunferencia, entonces por propiedad se cumple que $l = r$. Además, el área de la parte sombreada es igual a la diferencia entre el área de la región formada por la circunferencia y el área del hexágono, es decir:

$$A_{parte\ sombreada} = A_{región\ circular} - A_{hexágono\ regular} = \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2$$
$$\Rightarrow A_{parte\ sombreada} = r^2 \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{2} \right).$$

22. En la figura de abajo, la longitud del menor arco AB es igual a 10, el valor de x es igual a:



Resolución

Por propiedad se cumple que:

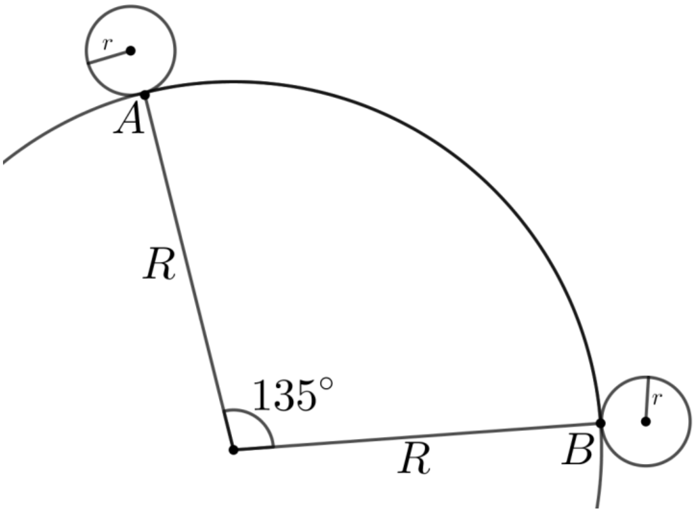
$$long\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \alpha \times r,\ \ \alpha\ en\ radianes$$

Siendo α el ángulo central correspondiente al arco AB. De aquí,

$$long\left(\overset{\frown}{AB}\right)=\alpha\times r\Rightarrow 10=x\left(x+3\right)\Rightarrow x^2+3x-10=0\Rightarrow x=-5\; o\; x=2.$$

Entonces $x=2$.

23. En la figura de abajo, $R=8r$, el número de vueltas que da la rueda de radio r en su recorrido de A a B, es igual a:



Resolución

Por propiedad se cumple que:

$$long\left(\overset{\frown}{AB}\right)=\alpha\times R,\;\; \alpha \; en\; radianes$$

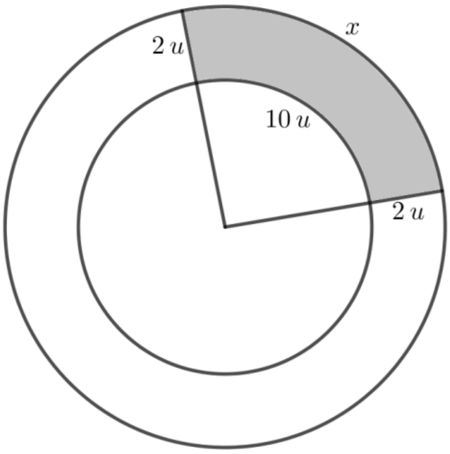
Entonces de aquí,

$$long\left(\overset{\frown}{AB}\right)=\frac{135^\circ}{180^\circ}\pi\times 8r=12\pi r$$

El número de vueltas que da la rueda de radio r en su recorrido de A a B, se puede interpretar como el cociente entre la $long\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ y el perímetro de la rueda, es decir:

$$N=\frac{long\left(AB\right)}{P}=\frac{12\pi r}{2\pi r}=6\; vueltas.$$

24. En la figura de abajo, el área del trapecio circular es igual a $42u^2$, el valor de x es igual a:



Resolución

En la figura:

$$A_{trapecio\ circular} = \left(\frac{x+10}{2}\right) \times 2 = x + 10$$

De esta manera, $A_{trapecio\ circular} = 42 = x + 10 \Rightarrow x = 32u.$

Bibliografía

Giovanni, J., Bonjorno, J., Giovanni, J.Jr. y Acosta, R. (2005). Matemática Fundamental: volumen único. São Paulo: FTD.

Baldor, J. (2004). Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría. México: Grupo Patria Cultural.

Dolce, O. y Pompeo, J. (2005). Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana. São Paulo: Atual.

Dolce, O. y Pompeo, J. (2013). Fundamentos de Matemática Elementar: geometria espacial. São Paulo: Atual.

Iezzi, G. (1998). Fundamentos de Matemática Elementar: trigonometria. São Paulo: Atual.

Alexander, D., &Koeberlein, G. (2013). Geometría (Quinta ed.). (J. L. Cárdenas, Trans.) México: CengageLearning.

Campos, X. C., & Schmidt, X. C. (2012). Geometría (Segunda ed.). Santiago, Chile: McGrawHill.

Moise, E. E., &FloyL.Downs, J. (1986).Geometría Moderna. (M. García, Trans.) Wilmington,

Delaware, Estados Unidos: Addison- Wesley. Dante, L. R. (2002). Matemática. Sao Paulo, Brasil: Ática.

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). Matemáticas simplificadas (3era. ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.

Secchia, A. y Montiel, S. (1980). Problemas de Geometría: Geometría Plana. Asunción: Comuneros

Secchia, A. y Montiel, S. (1979). Problemas de Geometría: Geometría del Espacio. Asunción: Comuneros.

Secchia, A. y Pujol, F. (1979). Ejercicios de Trigonometría. Asunción: Comuneros.

Repetto, C. y Fesquet, H. (1968). Trigonometría y Elementos de Análisis Matemático. Buenos Aires: Kapelusz