FP-UNA - CONSTRUYENDO EL FUTURO

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Polígonos

Material de Lectura

Este material de lectura fue elaborado por los docentes de la asignatura Geometría y Trigonometría del CPA de la FP-UNA para el desarrollo de la unidad II de dicha asignatura. Contiene información básica y debe ser complementado con los textos de la bibliografía del programa de estudios.

Facultad Politécnica UNA
Curso Preparatorio de Admisión

Índice

POLÍGONOS

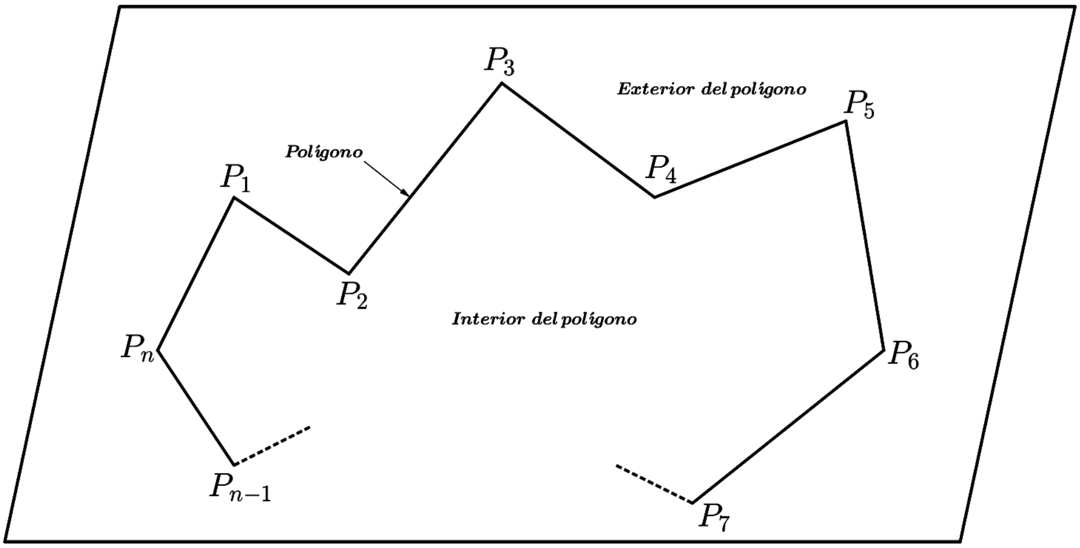
1 Definición.

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$; n puntos distintos y no colineales de un plano con $n \geq 3$, y sean los n segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$, tales que:

i) Ningún par de segmentos se intersecan, excepto en sus puntos extremos.

ii) Ningún par de segmentos con un extremo común son colineales.

Entonces, la unión de los n segmentos se llama polígono.



2 Elementos.

2.1 Vértices

Los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son los vértices del polígono.

2.2 Lados

Los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ son los lados del polígono.

2.3 Lados consecutivos

Dos lados que se intersecan en uno de sus extremos se llaman lados consecutivos. Por ejemplo, los lados $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$ son consecutivos.

2.4 Ángulos interiores

Dos lados consecutivos determinan el ángulo interior. Así los ángulos $\angle P_nP_1P_2, \angle P_1P_2P_3, \ldots, \angle P_{n-1}P_nP_1$ son los ángulos interiores del polígono.

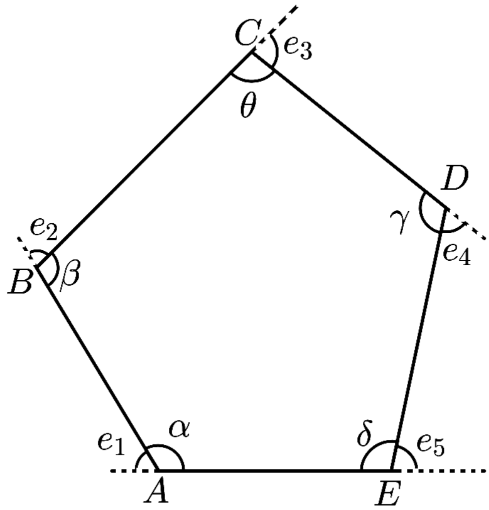
2.5 Ángulos exteriores

Es aquel ángulo adyacente a un ángulo interior.

2.6 Diagonales

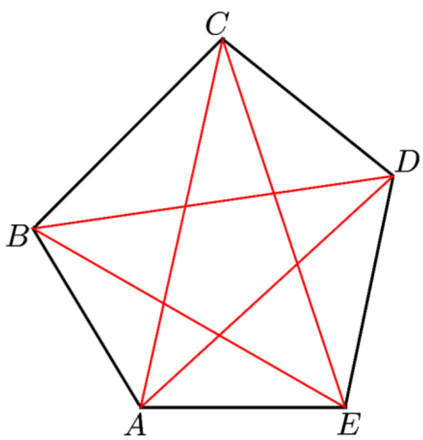
Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos. Por ejemplo, el segmento $\overline{P_2P_4}$ es una diagonal del polígono.

A continuación veamos los elementos del siguiente polígono.



Elementos

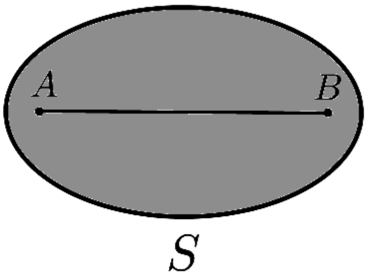
- **Vértices:** los puntos A, B, C, D y E.
- **Lados:** los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ y $\overline{EA}$.
- **Ángulos interiores:** los ángulos α, β, θ, γ y δ.
- **Ángulos exteriores:** los ángulos e_1, e_2, e_3, e_4 y e_5.
- **Diagonales:** los segmentos $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}$ y $\overline{CE}$.



3 Polígono cóncavo y polígono convexo.

Un ***polígono es convexo*** si su interior es un conjunto convexo.

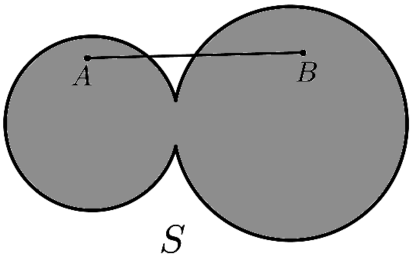
IMPORTANTE: Un conjunto no vacío de puntos, S, es **convexo**, si dado cualquier par de puntos del conjunto, el segmento que los une está incluido en S.



En la figura el segmento AB está incluido en S, siendo A y B dos puntos interiores cualesquiera de S.

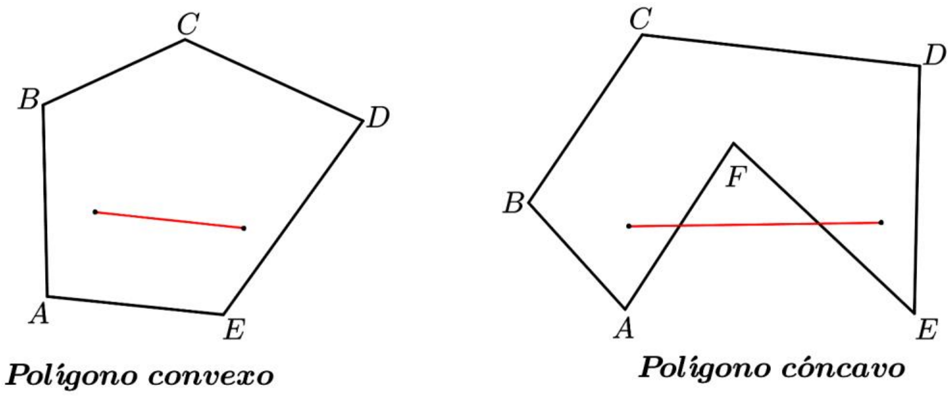
Un ***polígono es cóncavo*** si su interior es un conjunto cóncavo.

IMPORTANTE: Un conjunto no vacío de puntos, S, es **cóncavo**, si existe algún par de puntos del conjunto, cuyo segmento que los une no se encuentra totalmente incluido en S, es decir tiene algunos puntos exteriores al conjunto S.



En la figura el segmento AB no está totalmente incluido en S, siendo A y B dos puntos interiores de S.

Ejemplo de polígono convexo y polígono cóncavo:

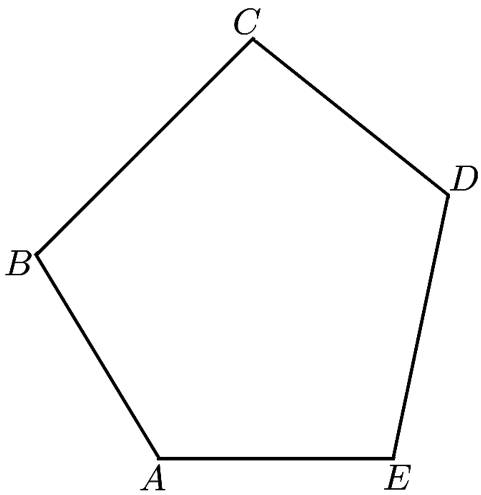


4 Perímetro.

La suma de las longitudes de los lados se llama **perímetro** del polígono.

Por ejemplo, el perímetro del polígono de la figura de abajo es

$$P = AB + BC + CD + DE + EA$$



5 Nombres de polígonos según el número de lados

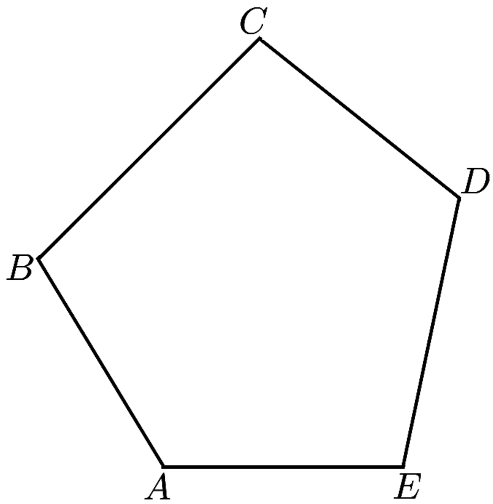
Los polígonos se clasifican según su número de lados.

Nombre de los polígonos teniendo en cuenta la cantidad de lados

Número de lados	Nombre del Polígono
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Los demás polígonos no tienen nombre especial, se los menciona según su número de lados.

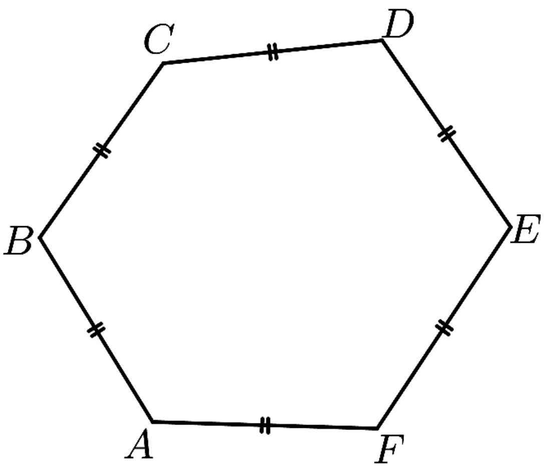
Por ejemplo, en la figura de abajo tenemos un pentágono al cual en ocasiones se lo llama por sus vértices, es decir, el pentágono $ABCDE$.



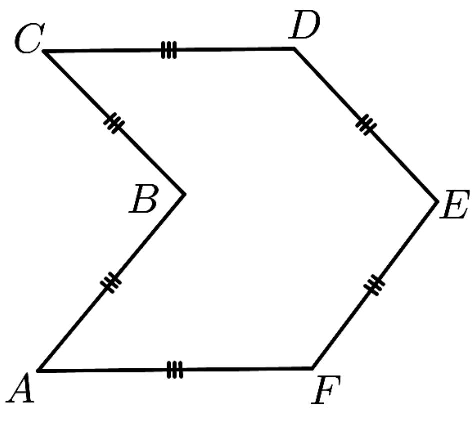
6 Polígono equilátero, polígono equiángulo y polígono regular

6.1 Polígono equilátero

Es aquel polígono en el cual todos sus lados tienen misma longitud.



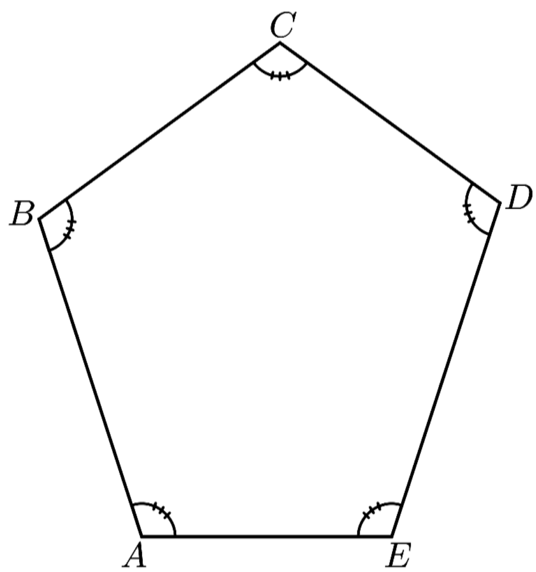
Hexágono convexo equilátero



Hexágono cóncavo equilátero

6.2 Polígono equiángulo

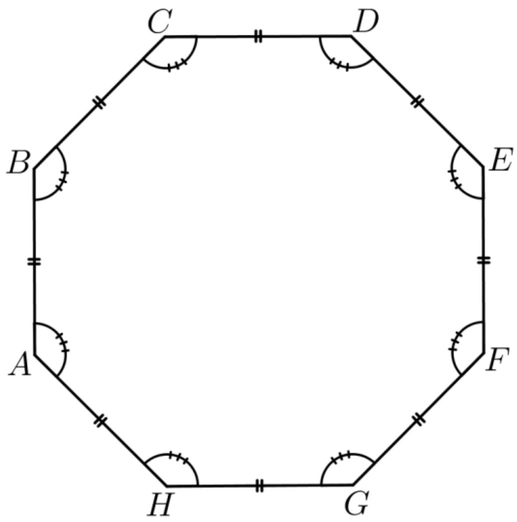
Es aquel polígono en el cual todos sus ángulos interiores tienen misma medida.



Pentágono equiángulo

6.3 Polígono regular

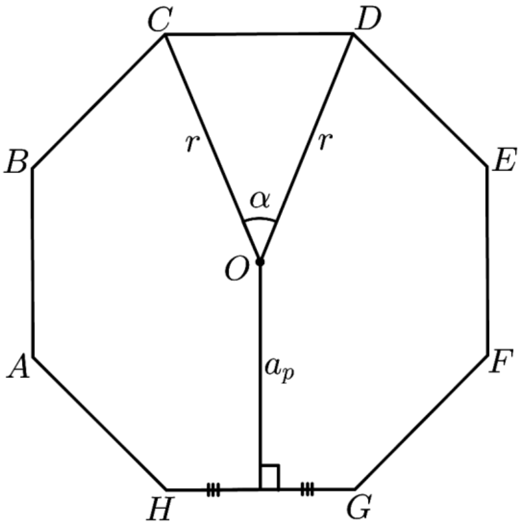
Es aquel polígono equilátero y equiángulo a la vez.



Octágono regular

6.3.1 Elementos de un polígono regular

- **Centro:** es el punto que equidista de los vértices del polígono.
- **Radio:** es la longitud del segmento que une el centro y un vértice cualquiera del polígono.
- **Ángulo central:** es el ángulo formado por dos radios consecutivos.
- **Apotema:** es el segmento trazado desde el centro al punto medio del lado del polígono, y es perpendicular al lado en dicho punto.



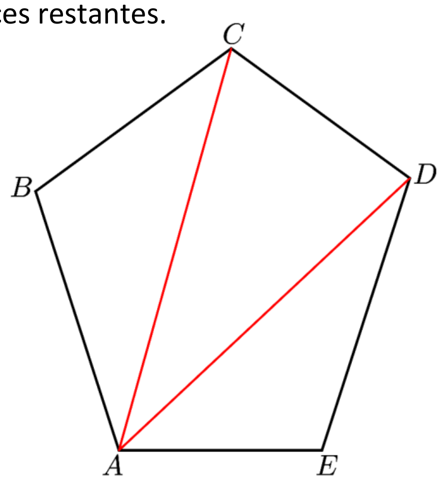
$O = centro$
$r = radio$
$\alpha = \acute{a}ngulo\ central$
$a_p = apotema$

6.4 Propiedades

1. En todo polígono de n lados el número total de diagonales trazados desde un vértice es $d = (n-3)$.

   Ejemplo:

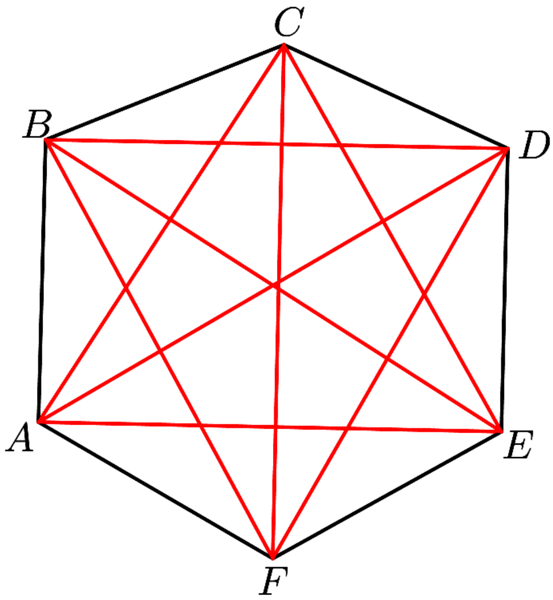
   En el pentágono de la figura de abajo, $n = 5$; considerando el vértice A, vemos que desde A se pueden trazar $d = 5-3 = 2$ diagonales, lo mismo ocurre con los vértices restantes.



2. En todo polígono de n lados el número total de diagonales es $D=\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Ejemplo:

En el hexágono de la figura de abajo, $n=6$, el número total de diagonales es igual a $D=\dfrac{6(6-3)}{2}=9$.

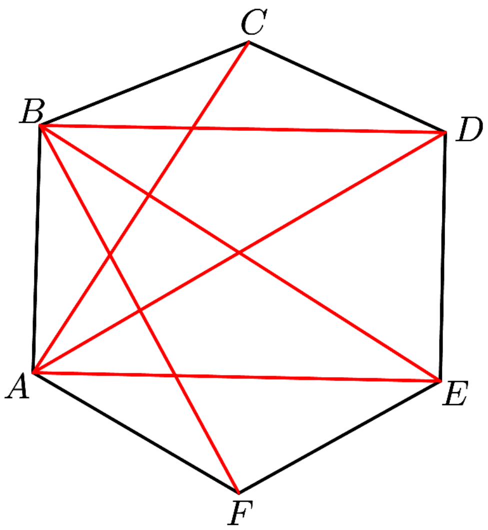


3. En todo polígono de n lados el número total de diagonales que se pueden trazar desde k vértices consecutivos es $D_{V_1}^{V_k}=k\,n-\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Ejemplo:

En el hexágono de la figura de abajo, $n=6$, el número total de diagonales desde los vértices consecutivos A y B es igual a

$D_A^B=2\times 6-\dfrac{(2+1)(2+2)}{2}=6$. Tenga en cuenta que $k=2$.

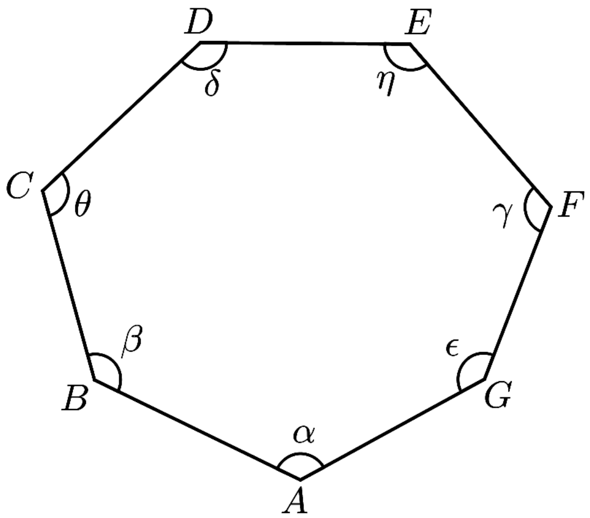


4. En todo polígono de n lados la suma de las medidas de los ángulos interiores es $S = 180^0(n-2)$.

Ejemplo:

En el heptágono de la figura de abajo, $n = 7$, la suma de sus ángulos interiores es

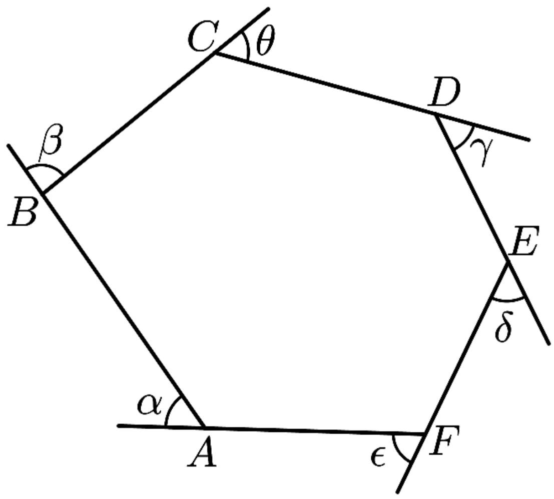
$$S = \alpha + \beta + \theta + \delta + \varepsilon + \gamma + \eta = 180^0(7-2)$$
$$S = 900^0$$



5. En todo polígono convexo de n lados la suma de las medidas de los ángulos exteriores es igual a 360^0.

Ejemplo:

En el hexágono convexo de la figura de abajo, $\alpha + \beta + \theta + \gamma + \delta + \varepsilon = 360^0$.

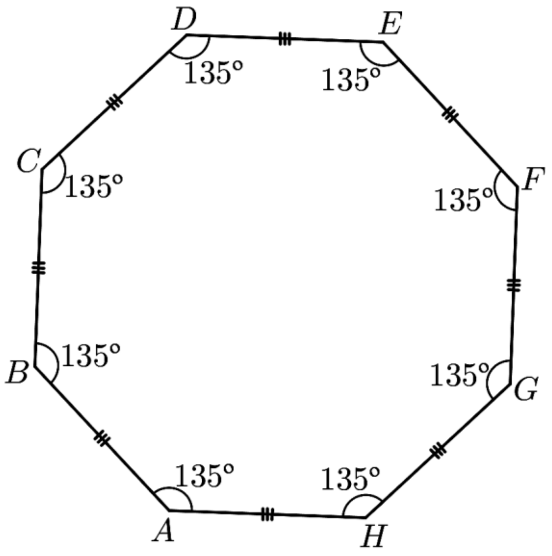


6. En todo polígono regular o equiángulo de n lados la medida de un ángulo interior es $i = \dfrac{180^0 (n-2)}{n}$.

Ejemplo:

En el octágono regular de la figura de abajo, cada ángulo interior mide

$i = \dfrac{180^0 (n-2)}{n} = \dfrac{180^0 (8-2)}{8} = 135^0$.

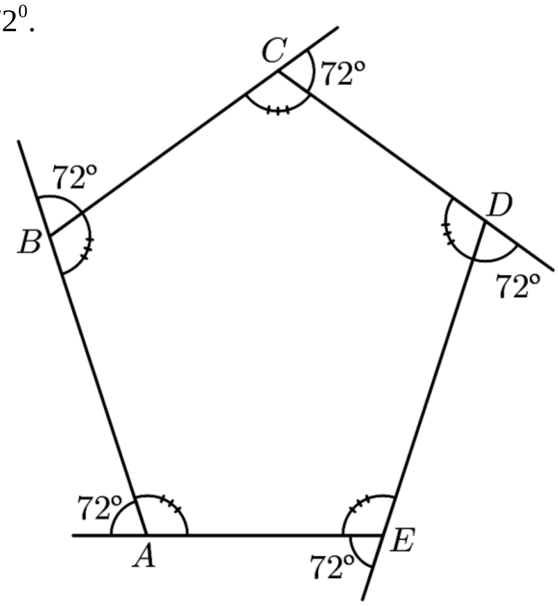


7. En todo polígono regular o equiángulo de n lados la medida de un ángulo exterior es $e = \dfrac{360^0}{n}$.

Ejemplo:

En el pentágono equiángulo de la figura de abajo, cada ángulo exterior mide

$e = \dfrac{360^0}{n} = \dfrac{360^0}{5} = 72^0$.



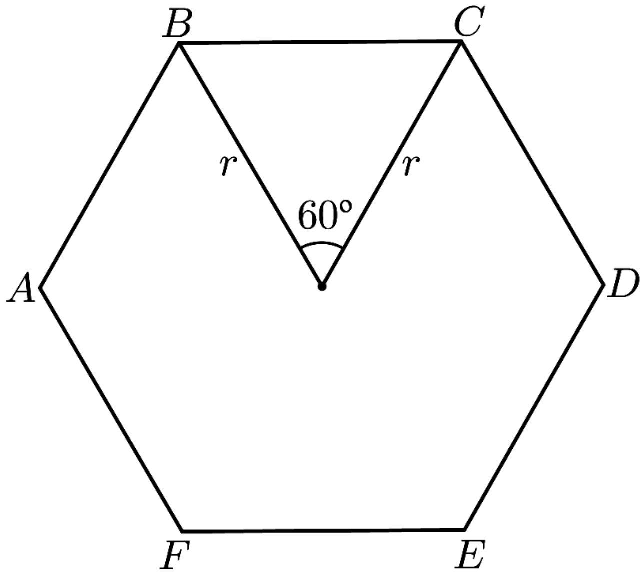
8. En todo polígono regular de n lados la medida de un ángulo central es

$$\alpha = \frac{360^0}{n}.$$

Ejemplo:

En el hexágono regular de la figura de abajo, cada ángulo central mide

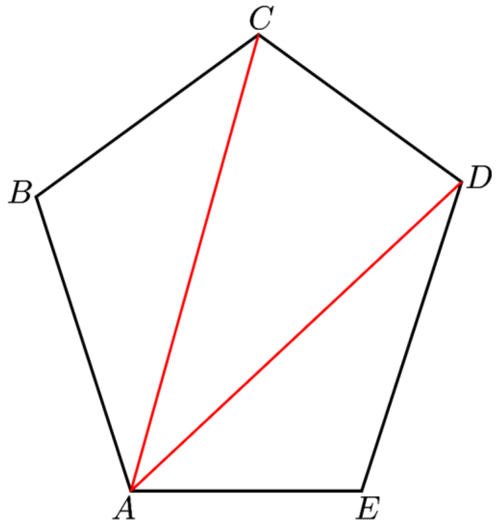
$$e = \frac{360^0}{n} = \frac{360^0}{6} = 60^0.$$



9. En todo polígono convexo de n lados al trazar todas las diagonales desde un solo vértice, el polígono queda dividido en $n(\Delta) = n-2$ triángulos.

Ejemplo:

En el pentágono de la figura de abajo, $n=5$, se trazan todas las diagonales desde el vértice A y el pentágono queda dividido en $n(\Delta) = n-2 = 5-2 = 3$ triángulos.



7 Problemas resueltos

1. Si el número de lados de un polígono se duplica, su número de diagonales aumenta en 18, entonces el número de lados del polígono es:

Resolución

Sea n el número de lados del polígono, como el número de lados de este polígono se duplica, entonces tenemos otro polígono cuyo número de lados es igual a $2n$.

Por ejemplo, si inicialmente tenemos un triángulo y se duplica su número de lados, el polígono resultante es un hexágono.

De esta manera tenemos el siguiente cuadro:

	Polígono 1	Polígono 2
Número de lados	n	$2n$
Número de diagonales	$D_1 = \dfrac{n(n-3)}{2}$	$D_2 = \dfrac{2n(2n-3)}{2}$

Del enunciado del ejercicio:

$$\begin{aligned}
&D_2 = D_1 + 18\\
&\frac{2n(2n-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 18\\
&\frac{4n^2-6n}{2} = \frac{n^2-3n}{2} + 18\\
&\frac{4n^2-6n}{2} = \frac{n^2-3n+36}{2}\\
&4n^2-6n = n^2-3n+36\\
&3n^2-3n-36 = 0 \ldots\ldots \div 3\\
&n^2-n-12 = 0\\
&n = 4
\end{aligned}$$

2. Si a un polígono se le quita un lado se obtiene otro polígono cuyo número de diagonales difiere del primero en 17, entonces el número total de diagonales que se pueden trazar desde un vértice del primer polígono es:

Resolución

Sea n el número de lados del primer polígono, entonces:

	Polígono 1	Polígono 2
Número de lados	n	$n-1$
Número de diagonales	$D_1=\frac{n(n-3)}{2}$	$D_2=\frac{(n-1)((n-1)-3)}{2}=\frac{(n-1)(n-4)}{2}$

Del enunciado del ejercicio:

$$D_1-D_2=17$$
$$\frac{n(n-3)}{2}-\frac{(n-1)(n-4)}{2}=17$$
$$\frac{n^2-3n}{2}-\frac{n^2-4n-n+4}{2}=17$$
$$\frac{n^2-3n-n^2+4n+n-4}{2}=17$$
$$2n-4=34$$
$$2n=38$$
$$n=19$$

Finalmente, lo que nos pide calcular el ejercicio es $d=n-3=19-3=16$.

3. En un polígono regular la medida de un ángulo interior es igual a cinco veces la medida de su ángulo central, entonces el número de diagonales de dicho polígono es igual a:

Resolución

Sea n el número de lados del polígono regular, considerando el enunciado del ejercicio, tenemos que $i=5\alpha$, i siendo la medida de un ángulo interior y α la medida del ángulo central del polígono. De aquí:

$$i=5\alpha$$
$$\frac{180^0(n-2)}{n}=5\times\frac{360^0}{n}$$
$$n-2=5\times 2$$
$$n=12$$

entonces el número total de diagonales del polígono es $D=\frac{12(12-3)}{2}=54$.

4. Desde 7 vértices consecutivos de un polígono regular de n lados se han trazado 48 diagonales, la medida de cada ángulo interno del polígono es:

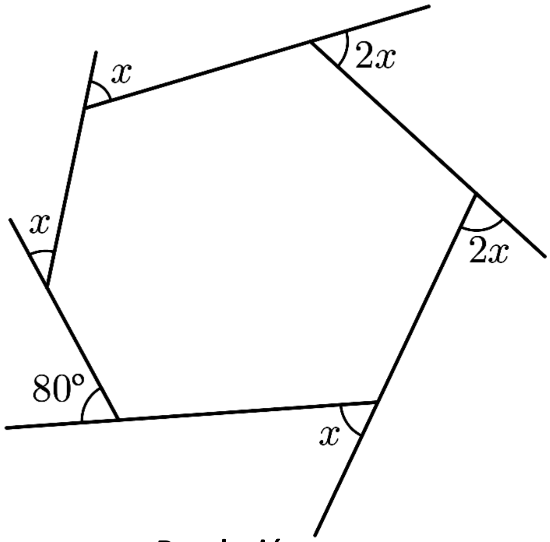
Resolución

Según el enunciado del ejercicio $D_{V_1}^{V_7} = 48$, y $k = 7$, de aquí:

$$D_{V_1}^{V_7} = 48$$
$$7n - \frac{(7+1)(7+2)}{2} = 48$$
$$7n - 36 = 48$$
$$7n = 84$$
$$n = 12$$

De esta forma, cada ángulo interior del polígono mide $i = \dfrac{180^0 (12-2)}{12} = 150^0$

5. En la figura de abajo, el valor de x es igual a:



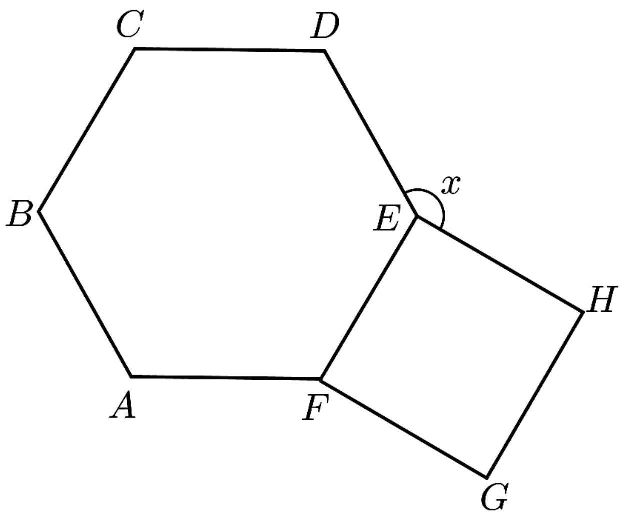
Resolución

Analizando la figura dada, vemos que los segmentos determinan un hexágono convexo y que los ángulos mostrados son los ángulos exteriores de dicho hexágono.

Como los ángulos exteriores suman 360^0 tenemos

$$80^0 + x + x + 2x + 2x + x = 360^0$$
$$7x = 360^0 - 80^0$$
$$7x = 280^0$$
$$x = 40^0$$

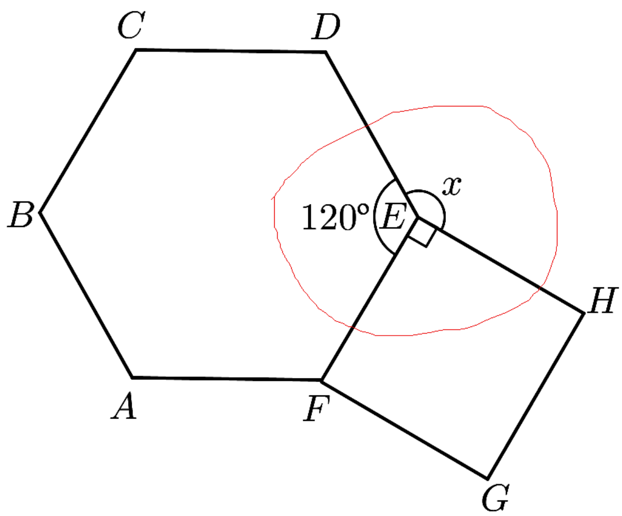
6. En la figura de abajo, los polígonos $ABCDEF$ y $EFGH$ son regulares, el valor de x es igual a:



Resolución

Como los polígonos $ABCDEF$ y $EFGH$ son regulares entonces sus ángulos interiores miden $\dfrac{180^0(6-2)}{6}=120^0$ y $\dfrac{180^0(4-2)}{4}=90^0$ respectivamente.

De aquí:



Usando el hecho de que $90^0+120^0+x=360^0$ resulta que $x=150^0$.

7. Al aumentar en 4 el número de lados de un polígono, la suma de sus ángulos internos se duplica, entonces el número de diagonales de este polígono es:

Resolución

Sea n el número de lados del polígono, como el número de lados de este polígono aumenta en 4, entonces tenemos otro polígono cuyo número de lados es igual a $n+4$.

Por ejemplo, si inicialmente tenemos un cuadrilátero y aumenta en 4 su número de lados, el polígono resultante es un octágono.

De esta manera tenemos el siguiente cuadro:

	Polígono 1	Polígono 2
Número de lados	n	$n+4$
Número de diagonales	$S_1 = 180^0 (n-2)$	$S_2 = 180^0 ((n+4)-2) = 180^0 (n+2)$

Del enunciado del ejercicio:

$$\begin{aligned}
&S_2 = 2S_1 \\
&180^0 (n+2) = 2 \times 180^0 (n-2) \\
&n+2 = 2(n-2) \\
&n+2 = 2n-4 \\
&2+4 = 2n-n \\
&6 = n
\end{aligned}$$

Entonces, el número total de diagonales es $D = \dfrac{6(6-3)}{2} = 9.$

8. En un polígono equiángulo la medida de un ángulo interior es igual a tres veces la medida de su ángulo exterior, entonces el número de triángulos que se pueden formar al trazar todas las diagonales desde un sólo vértice es:

Resolución

Sea n el número de lados del polígono equiángulo. Considerando el enunciado del ejercicio tenemos que $i = 3e$, donde i es la medida de un ángulo interior y e la medida del ángulo exterior del polígono. De aquí:

$$i + e = 180^0$$
$$3e + e = 180^0$$
$$4e = 180^0$$
$$e = 45^0$$
$$\frac{360^0}{n} = 45^0$$
$$n = 8$$

entonces el número de triángulos que se pueden formar al trazar todas las diagonales desde un sólo vértice es: $n(\Delta) = n - 2 = 8 - 2 = 6$.

Bibliografía

Giovanni, J., Bonjorno, J., Giovanni, J.Jr. y Acosta, R. (2005). *Matemática Fundamental: volumen único*. São Paulo: FTD.

Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría*. México: Grupo Patria Cultural.

Dolce, O. y Pompeo, J. (2005). *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana*. São Paulo: Atual.

Dolce, O. y Pompeo, J. (2013). *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria espacial*. São Paulo: Atual.

Iezzi, G. (1998). *Fundamentos de Matemática Elementar: trigonometria*. São Paulo: Atual.

Alexander, D., &Koeberlein, G. (2013). *Geometría* (Quinta ed.). (J. L. Cárdenas, Trans.) México: CengageLearning.

Campos, X. C., & Schmidt, X. C. (2012). *Geometría* (Segunda ed.). Santiago, Chile: McGraw-Hill.

Moise, E. E., & Floy L.Downs, J. (1986). *Geometría Moderna.* (M. García, Trans.) Wilmington, Delaware, Estados Unidos: Addison-Wesley.

Dante, L. R. (2002). *Matemática*. Sao Paulo, Brasil: Ática.

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). Matemáticas simplificadas (3era. ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.

Secchia, A. y Montiel, S. (1980). *Problemas de Geometría: Geometría Plana*. Asunción: Comuneros

Secchia, A. y Montiel, S. (1979). *Problemas de Geometría: Geometría del Espacio*. Asunción: Comuneros.

Secchia, A. y Pujol, F. (1979). *Ejercicios de Trigonometría*. Asunción: Comuneros.

Repetto, C. y Fesquet, H. (1968). *Trigonometría y Elementos de Análisis Matemático*. Buenos Aires: Kapelusz.

Velázquez, M., Bellassai, P., Pino, R., Duré, A., Aranda, T. (2010). Matemática Básica con Estadística (4ta. ed.). Asunción: Litocolor