FP-UNA - CONSTRUYENDO EL FUTURO

# GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

# **Cuadriláteros**

## MATERIAL DE LECTURA

Este material de lectura fue elaborado por los docentes de la asignatura Geometría y Trigonometría del CPA de la FP-UNA para el desarrollo de la unidad IV de dicha asignatura. Contiene información básica y debe ser complementado con los textos de la bibliografía del programa de estudios.

Facultad Politécnica UNA
Curso Preparatorio de Admisión

# Índice



# Índice de figuras

# 1 Cuadriláteros

## 1.1 Introducción

A diferencia del triángulo, el cuadrilátero no es una figura rígida. El cuadrilátero puede tomar muchas formas diferentes. Algunos cuadriláteros con propiedades especiales se nombran mediante nombres particulares.

## 1.2 Definición. Notación

**Definición:** Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

**Notación:** En cuadrilátero cuyos vértices consecutivos son $A,\ B,\ C$ y $D$ se denota por $ABCD$.

## 1.3 Elementos

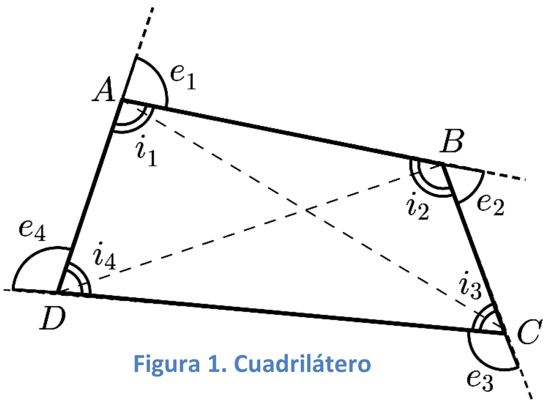


Figura 1. Cuadrilátero

**Vértices:** son los puntos $A,\ B,\ C$ y $D$

**Lados:** son los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.

**Ángulos internos:** son los ángulos $i_1,\ i_2,\ i_3$ e $i_4$

**Ángulos externos:** son los ángulos $e_1, e_2, e_3$ y $e_4$

**Diagonales:** son los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

***OBS:** si el cuadrilátero es **cóncavo** (tiene un ángulo interno cóncavo), no tendrá ángulo externo en el vértice donde el ángulo interno es cóncavo.*

## 1.4 Propiedades básicas

**1-** La suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es igual a $360°$. Es decir, si $i_1,\ i_2,\ i_3$ e $i_4$ son los ángulos interiores de un cuadrilátero, entonces: $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 360°$

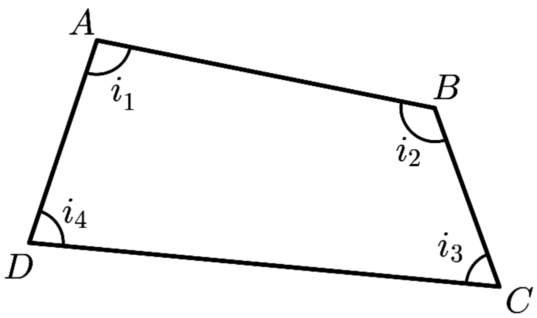


Figura 2. Suma de las medidas de ángulos internos

**2-** En un cuadrilátero **convexo** (los cuatro ángulos internos son convexos), la suma de las medidas de los ángulos externos es igual a $360°$. Es decir, si $e_1, e_2, e_3$ y $e_4$ son los ángulos exteriores de un cuadrilátero convexo, entonces: $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 360°$

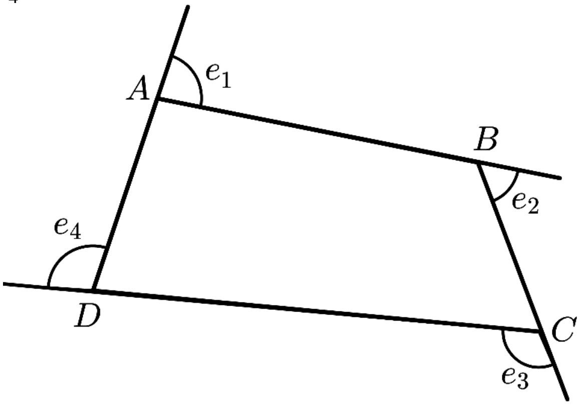



Figura 3. Suma de las medidas de los ángulos externos

## 1.5 Clasificación de cuadriláteros convexos

En un cuadrilátero $ABCD$ los lados no consecutivos, como por ejemplo $AB$ y $CD$ se llaman lados opuestos.

Ahora vamos a clasificar los cuadriláteros convexos según el paralelismo de sus lados opuestos.

### 1.5.1 Paralelogramo

Es el cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.

En la figura de la derecha: $\overline{AB} // \overline{DC}$ y $\overline{AD} // \overline{BC}$

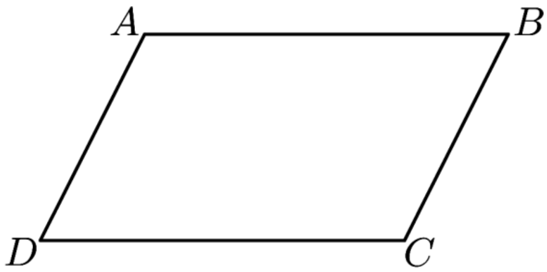



Figura 4. Paralelogramo

**Propiedades de los paralelogramos**

**1-** En un paralelogramo, los ángulos opuestos (ángulos de vértices no consecutivos) son de igual medida.

En la figura de la derecha:

- $i_1 = i_3$
- $i_2 = i_4$

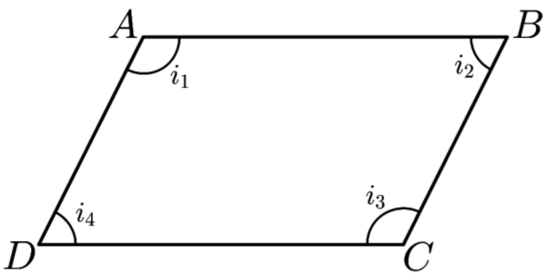



Figura 5. Propiedad 1 de paralelogramo

Además, los ángulos $i_1$ e $i_4$, así como $i_2$ e $i_3$ son ángulos conjugados internos por lo que: $i_1 + i_4 = 180°$ y $i_2 + i_3 = 180°$

**2-** En cualquier paralelogramo los lados opuestos son iguales.

- $m\overline{AB} = m\overline{DC}$ y $m\overline{BC} = m\overline{AD}$

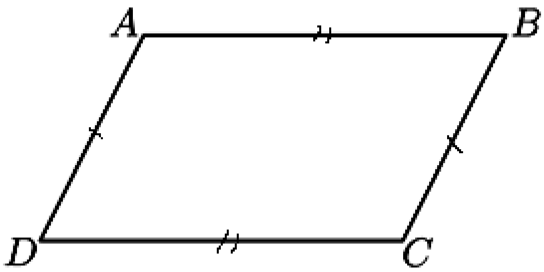



**Figura 6. Propiedad 2 de paralelogramo**

**3-** En cualquier paralelogramo, las diagonales se cortan en su punto medio.

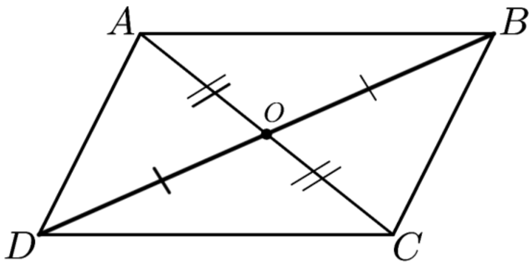



**Figura 7. Propiedad 3 de paralelogramo**

- $O$ es el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ por lo que: $AO = OC$ y $BO = OD$

## Casos especiales de paralelogramos:

**1- Rectángulo**

Un rectángulo es un paralelogramo equiángulo. Los cuatro ángulos de un rectángulo son rectos (de $90°$) las diagonales son iguales ($AC = BD$).

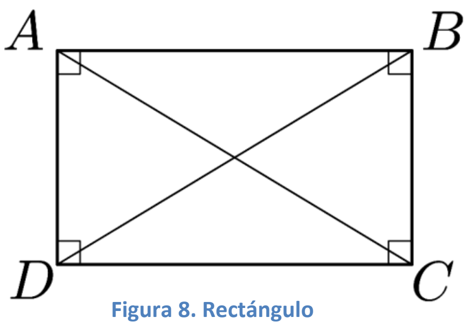



**Figura 8. Rectángulo**

### 2- Rombo

Un rombo es un paralelogramo equilátero.

**Propiedades:**

- Los cuatro lados son iguales $AB = BC = CD = AD$
- Sus diagonales son perpendiculares entre sí y son bisectrices de los ángulos internos.

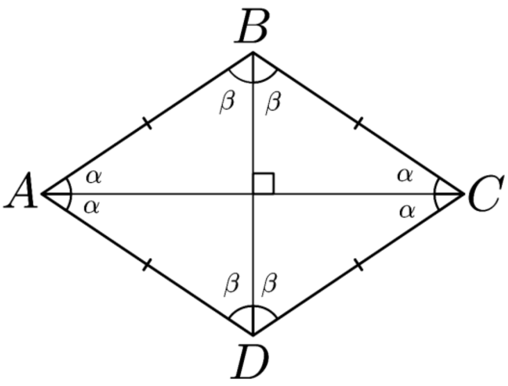



Figura 9. Rombo

### 3- Cuadrado

Un cuadrado es un paralelogramo equilátero y equiángulo.

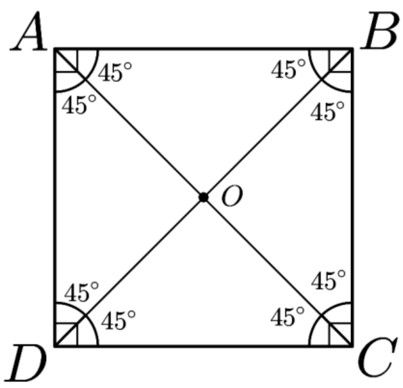



Figura 10. Cuadrado

**Propiedades:**

Un cuadrado es un rectángulo y también es un rombo, por lo tanto:

- Sus diagonales son iguales, perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos interiores.
- Los cuatro lados son iguales: $AB = BC = CD = AD$.

**4- Romboide**

Un romboide es un paralelogramo que NO es equilátero Ni equiángulo.

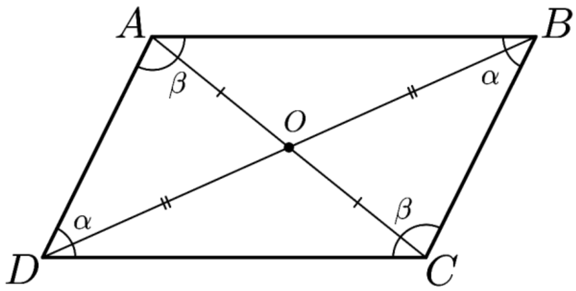



Figura 11. Romboide

**Propiedades:**

- $AB = DC$
- $BC = AD$
- $AB \neq BC$
- $\alpha \neq \beta$

## 1.5.2 Trapecios

Un trapecio es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados opuestos paralelos. Los lados opuestos paralelos son denominados **bases** del trapecio.

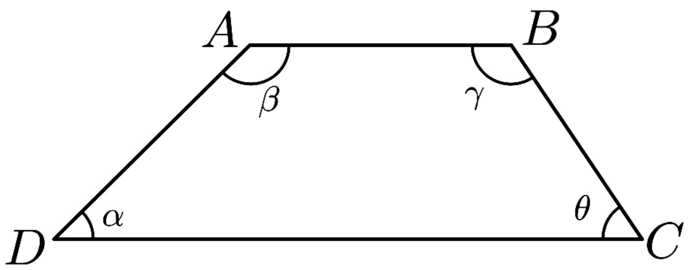



Figura 12. Trapecio

### 1.5.2.1 Propiedades generales

- $\overline{AB} // \overline{DC}$
- Base mayor: $\overline{DC}$
- Base menor: $\overline{AB}$
- $\alpha + \beta = 180°$
- $\theta + \gamma = 180°$

#### 1.5.2.2 Altura de un trapecio

La altura $h$ de un trapecio es la distancia entre las bases.

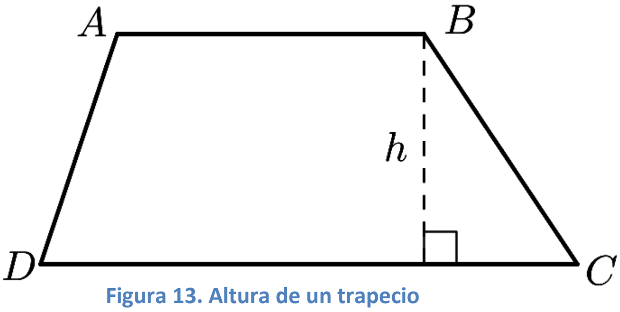



Figura 13. Altura de un trapecio

#### 1.5.2.3 Base media de un trapecio

La base media de un trapecio es un segmento cuyos extremos son los puntos medios de los lados no paralelos.

**Propiedades**

- $\overline{MN} // \overline{AB} // \overline{DC}$
- $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$

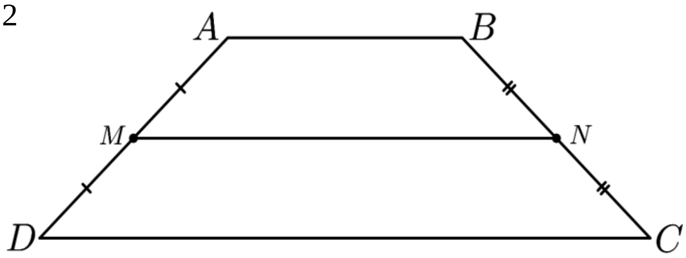
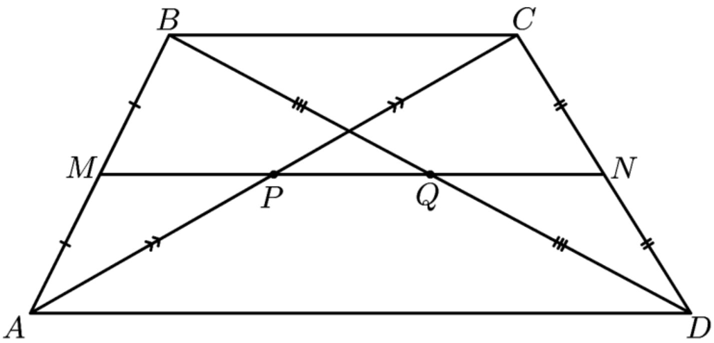



Figura 14. Base media de un trapecio

- En todo trapecio, la base media interseca a cada diagonal en su punto medio, además, la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales es igual a la semidiferencia de las longitudes de las bases.




$$PQ = \frac{AD - BC}{2}$$

### 1.5.2.4 Clasificación y propiedades particulares

#### 1- Trapecio rectángulo

Un trapecio rectángulo es un trapecio que tiene dos ángulos rectos.

**Propiedades**

- $\alpha + \beta = 180°$
- $\overline{AD} \neq \overline{BC}$
- $AB < DC$

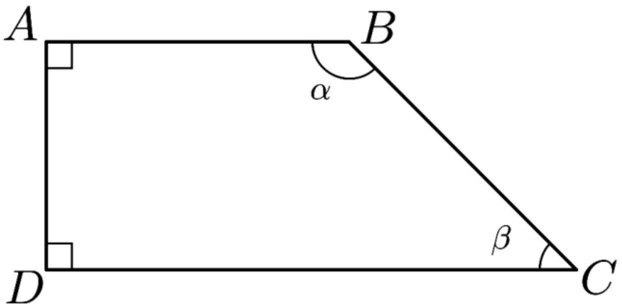



Figura 15. Trapecio rectángulo

#### 2- Trapecio isósceles

Un trapecio isósceles es aquel cuyos lados no paralelos son iguales.

**Propiedades**

- $AD = BC$
- Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son iguales.
- $\alpha + \beta = 180°$

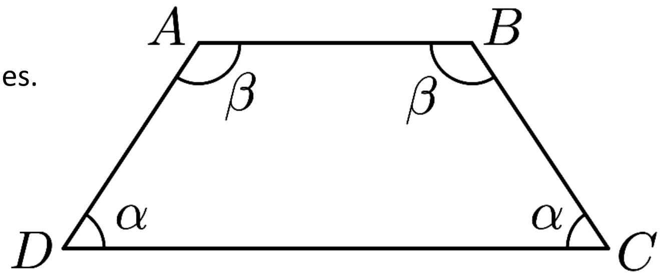



Figura 16. Trapecio isósceles

#### 3- Trapecio escaleno

Un trapecio escaleno es aquel cuyos lados no paralelos son distintos.

**Propiedades**

- $AD \neq BC$
- $\alpha + \gamma = 180°$
- $\theta + \beta = 180°$
- $\alpha \neq \beta$

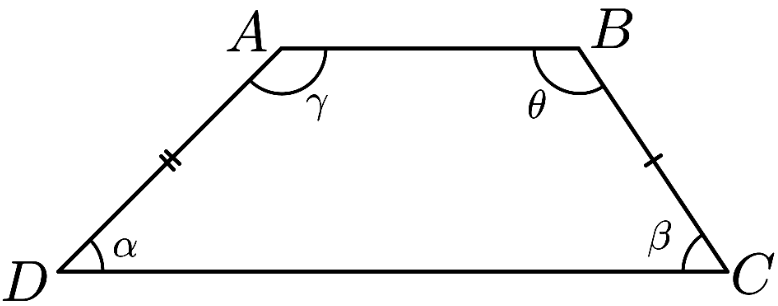



Figura 17. Trapecio escaleno

### 1.5.3 Trapezoides

Un trapezoide es un cuadrilátero convexo que no presenta lados opuestos paralelos.

#### Un trapezoide puede ser:

- **Simétrico:** trapezoide donde una de las diagonales es parte de la mediatriz de la otra diagonal.

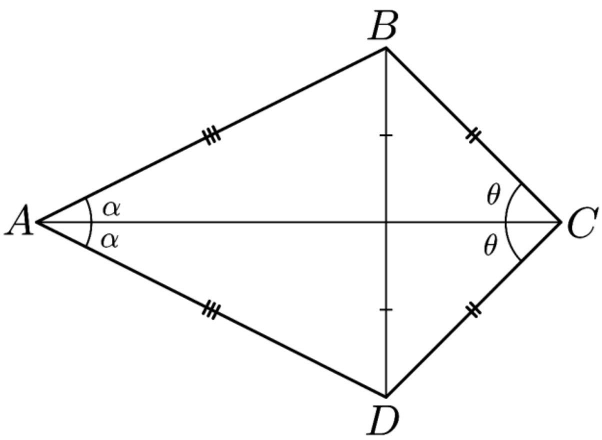



Figura 18. Trapezoide simétrico

- **Asimétrico:** trapezoide que no cumple la condición del trapezoide simétrico.

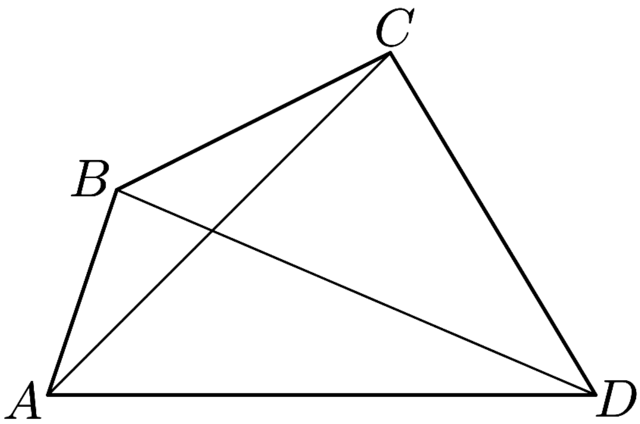
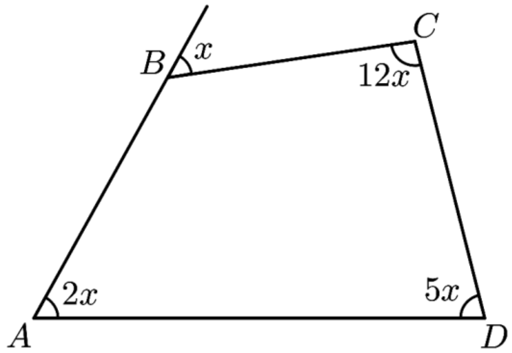



Figura 19.Trapezoide asimétrico

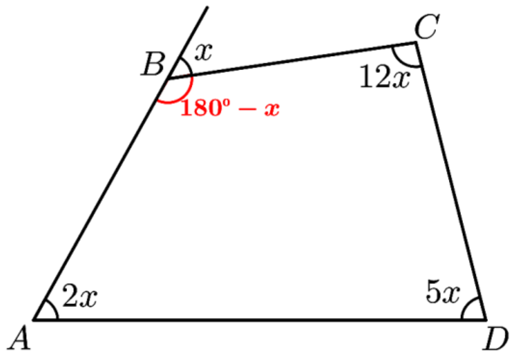
# 2 Problemas resueltos

**1. En la figura de abajo, el valor de $x$ es igual a:**




**Resolución**

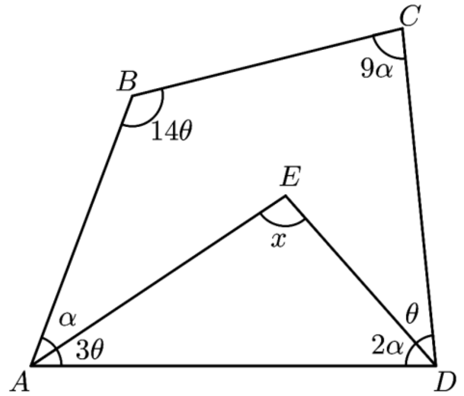
Primeramente, sabemos que la medida del ángulo adyacente al ángulo exterior $x$ correspondiente al vértice $B$ es igual a $180^0 - x$, entonces:




De aquí, la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$ es igual a $360^0$, esto es:

$$2x + 180^0 - x + 12x + 5x = 360^0$$
$$18x = 180^0$$
$$x = 10^0$$

**2. En la figura de abajo, el valor de $x$ es igual a:**



## Resolución

En el cuadrilátero convexo $ABCD$ sabemos que la suma de sus ángulos internos es igual a $360^0$, es decir:

$$\begin{aligned}&\alpha+3\theta+14\theta+9\alpha+\theta+2\alpha=360^0\\&12\alpha+18\theta=360^0\\&6(2\alpha+3\theta)=360^0\\&2\alpha+3\theta=60^0\text{.............}(1)\end{aligned}$$

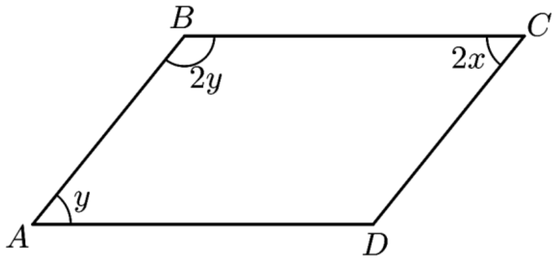
Y en el triángulo $AED$ se cumple que:

$$2\alpha+3\theta+x=180^0\text{..........}(2)$$

Reemplazando la ecuación (1) en la ecuación (2) tenemos que:

$$\begin{aligned}&2\alpha+3\theta+x=180^0\\&60^0+x=180^0\\&x=120^0\end{aligned}$$

**3. En la figura de abajo, $ABCD$ es un paralelogramo, el valor de $x$ es igual a:**




## Resolución

Como los ángulos de los vértices no consecutivos en todo paralelogramo tienen misma medida, entonces:

$$\overset{\angle}{A}=\overset{\angle}{C}\Leftrightarrow 2x=y\text{.........}(1).$$

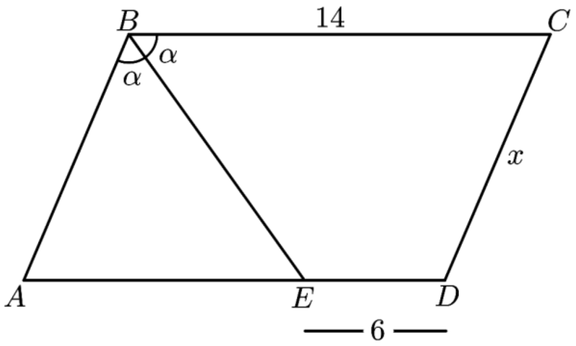
Además, los ángulos de vértices consecutivos son conjugados internos, tenemos que:

$$\overset{\angle}{A}+\overset{\angle}{B}=180^0\Leftrightarrow 2y+y=180^0,$$

de donde $y = 60^0$, este resultado reemplazamos en la ecuación (1), y de aquí:

$$2x = y = 60^0$$
$$2x = 60^0$$
$$x = 30^0$$

**4. En la figura de abajo, $ABCD$ es un paralelogramo, el valor de $x$, es igual a:**

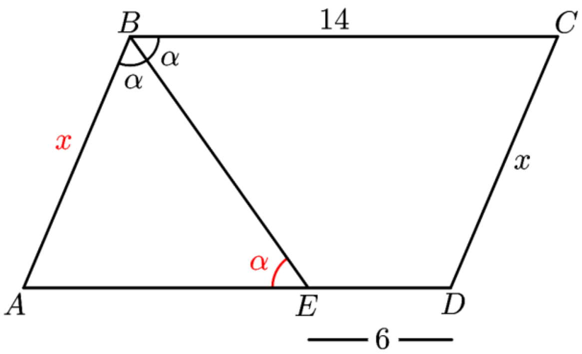



**Resolución**

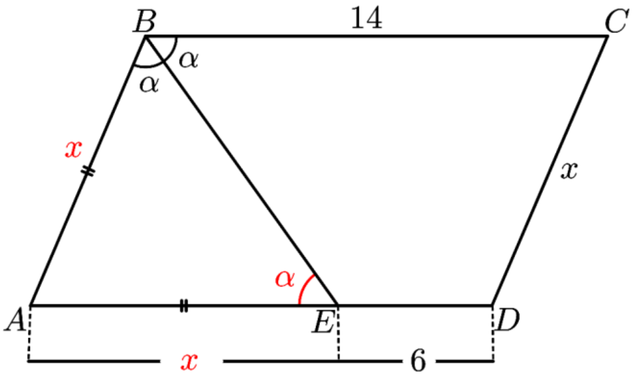
Como los lados opuestos en todo paralelogramo tienen misma medida, entonces:

$$AB = CD = x.$$

Además, $\overline{BE}$ es una secante entre las paralelas $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, entonces $\angle BEA = \alpha$, esto es:




Entonces de la figura sabemos que el triángulo $ABE$ es isósceles:

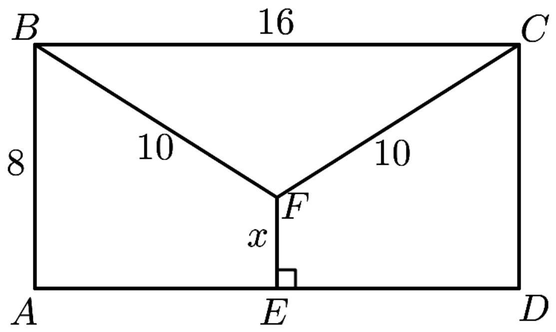


De aquí, nuevamente lados opuestos tienen misma medida, entonces:

$$BC = AD \Leftrightarrow 14 = x + 6$$

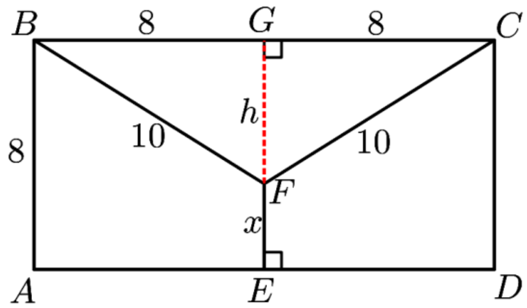
de donde $x = 8$.

5. **En la figura de abajo, $ABCD$ es un rectángulo, el valor de $x$, es igual a:**




**Resolución**

De la figura sabemos que el triángulo $BCF$ es isósceles, entonces como conocemos los tres lados de este triángulo, vamos a calcular la longitud de su altura respecto a la base, ***recuerden que la altura respecto a la base también es una mediana***:



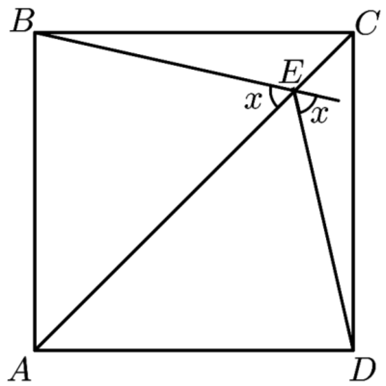

Entonces en el triángulo rectángulo $GCF$, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$h^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow h = 6$$

Además, en el rectángulo $ABGE$:

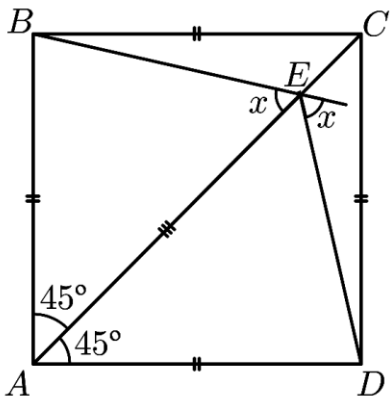
$$\begin{aligned} &AB = GE \Rightarrow 8 = x + h \\ &8 = x + 6 \\ &x = 2 \end{aligned}$$

6. **En la figura de abajo, $ABCD$ es un cuadrado, el valor de $x$, es igual a:**

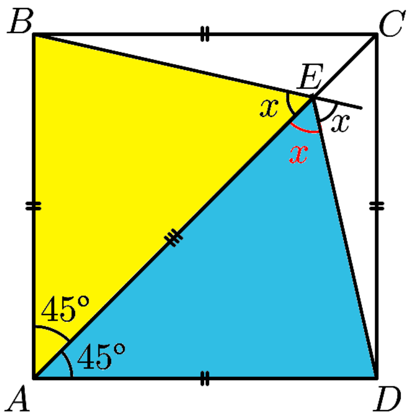



**Resolución**

En el cuadrado $ABCD$ sabemos que se cumple que, los lados tienen misma medida y que una diagonal forma, con los lados, ángulos de $45^0$, es decir:

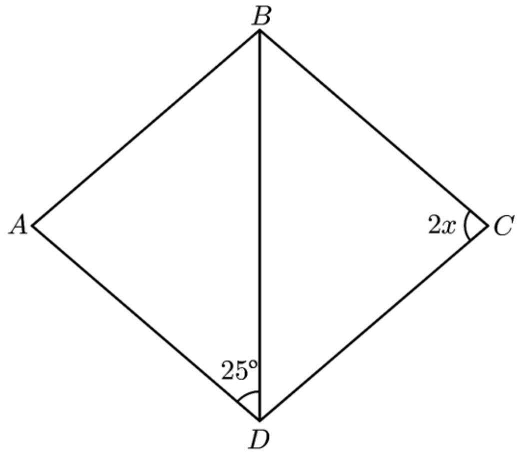



De la figura, vemos que los triángulos $ABE$ y $AED$ son congruentes o iguales, entonces aplicamos la propiedad de que ***a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa***, de aquí:



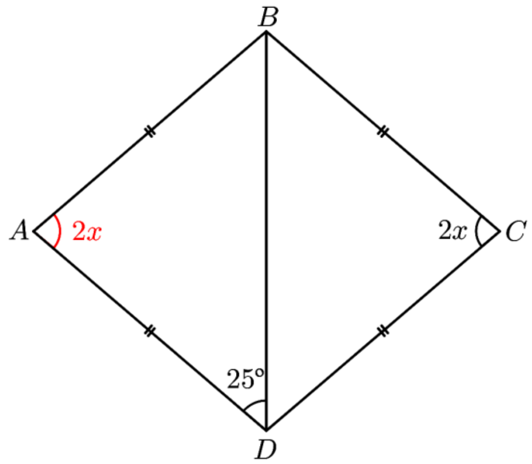

entonces $x+x+x=180^0$, de donde $x=60^0$.

**7. En la figura de abajo, $ABCD$ es un rombo, el valor de $x$ es igual a:**

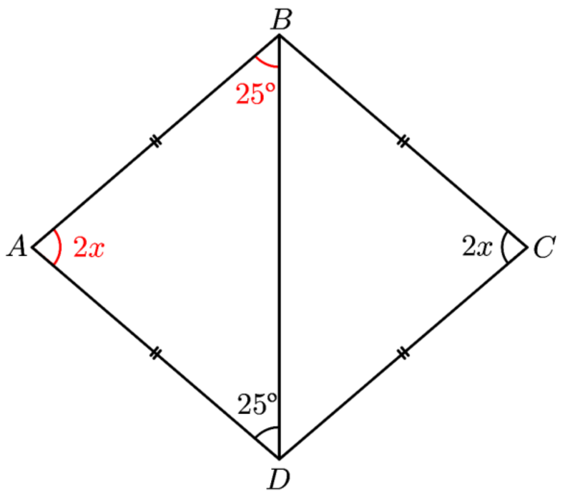



**Resolución**

En el rombo $ABCD$ sabemos que los lados tienen misma longitud y que los ángulos no consecutivos tienen misma medida, entonces:

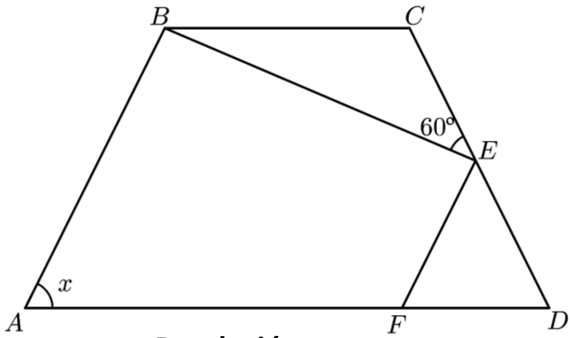



Observamos que el triángulo $ABD$ es isósceles, de aquí:



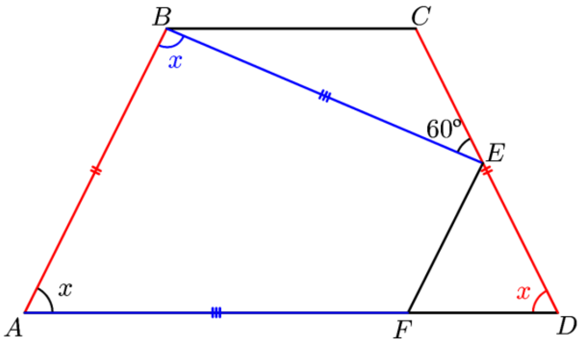

De esta forma $2x+25^0+25^0=180^0$, de donde $x=65^0$.

**8. En la figura de abajo, los trapecios $ABCD$ y $ABEF$ son isósceles, el valor de $x$ es igual a:**

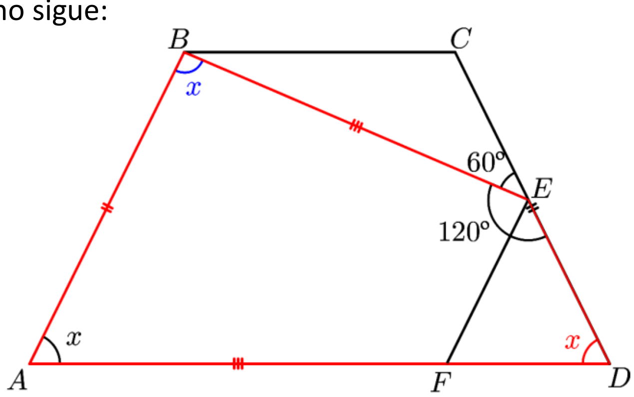



**<u>Resolución</u>**

Como los trapecios $ABCD$ y $ABEF$ son isósceles, implica que los ángulos en las bases son iguales, es decir:




A continuación, representamos el ángulo adyacente al ángulo de $60^0$ y consideramos el cuadrilátero $ABED$ como sigue:



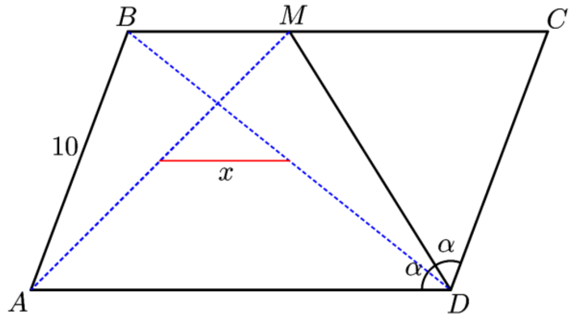

Aplicando la propiedad de suma de ángulos interiores en el cuadrilátero $ABED$ tenemos que:

$$x + x + x + 120^0 = 360^0$$
$$3x = 240^0$$
$$x = 80^0$$

**9. En un paralelogramo $ABCD$, se traza la bisectriz $DM$, donde $M$ es un punto de $\overline{BC}$. Si el lado $AB$ mide $10u$, entonces la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$ es:**

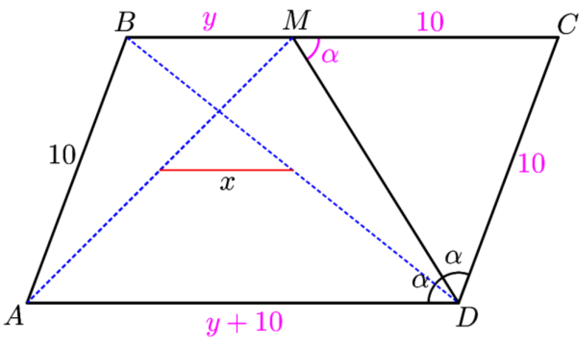
**Resolución**

Representamos primeramente lo que dice el enunciado del ejercicio:

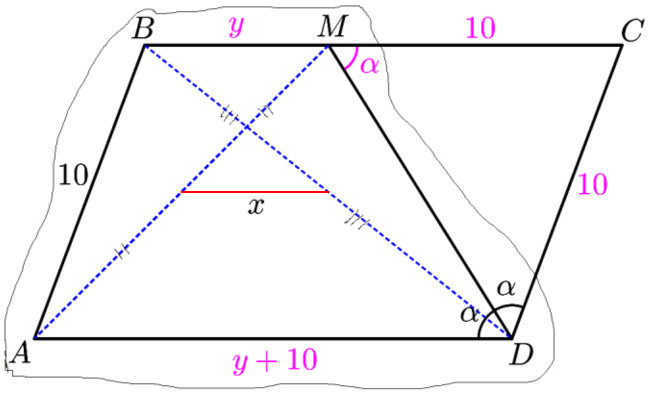



Entonces, lo que nos pide el ejercicio es el valor de $x$.

Como $ABCD$ es un paralelogramo, implica que $AB = CD = 10$, y $\overline{AD} // \overline{BC}$, entonces, $\angle DMC = \alpha$, es decir:

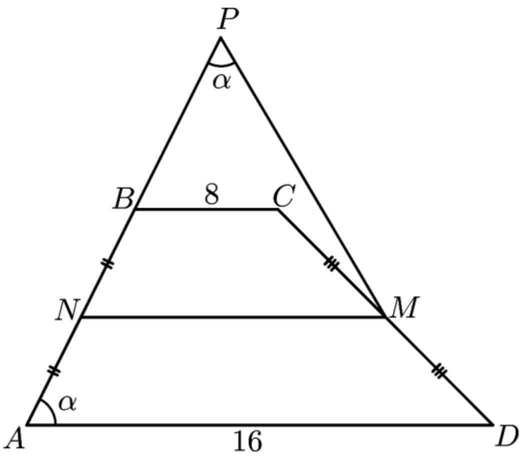



En la figura, $\angle DMC = \alpha$, quiere decir que el triángulo $DMC$ es isósceles y además definimos la medida de $BM$ igual a $y$, de aquí en el trapecio $ABMD$, $x$ es la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales, entonces:



$$x = \frac{AD - BM}{2}$$
$$x = \frac{y + 10 - y}{2}$$
$$x = 5$$

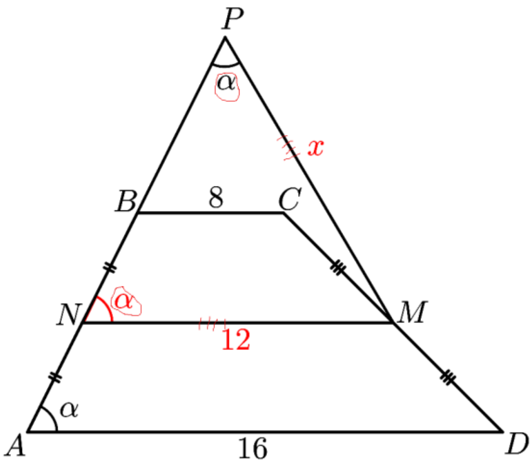
**10. En la figura de abajo, $ABCD$ es un trapecio, la medida de $PM$ es igual a:**




**<u>Resolución</u>**

En la figura el segmento $NM$ es la base media del trapecio $ABCD$, esto implica que

$NM = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{8 + 16}{2} = 12$ y además $\overline{NM} // \overline{BC} // \overline{AD}$ entonces:




Vemos que el triángulo $NPM$ es isósceles entonces $NM = PM \Rightarrow 12 = x$.

# Bibliografía

Giovanni, J., Bonjorno, J., Giovanni, J.Jr. y Acosta, R. (2005). *Matemática Fundamental: volumen único*. São Paulo: FTD.

Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría*. México: Grupo Patria Cultural.

Dolce, O. y Pompeo, J. (2005). *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana*. São Paulo: Atual.

Dolce, O. y Pompeo, J. (2013). *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria espacial*. São Paulo: Atual.

Iezzi, G. (1998). *Fundamentos de Matemática Elementar: trigonometria*. São Paulo: Atual.

Alexander, D., &Koeberlein, G. (2013). *Geometría* (Quinta ed.). (J. L. Cárdenas, Trans.) México: CengageLearning.

Campos, X. C., & Schmidt, X. C. (2012). *Geometría* (Segunda ed.). Santiago, Chile: McGraw-Hill.

Moise, E. E., &FloyL.Downs, J. (1986).*Geometría Moderna.* (M. García, Trans.) Wilmington, Delaware, Estados Unidos: Addison-Wesley.

Dante, L. R. (2002). *Matemática*. Sao Paulo, Brasil: Ática.

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). Matemáticas simplificadas (3era. ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.

Secchia, A. y Montiel, S. (1980). *Problemas de Geometría: Geometría Plana*. Asunción: Comuneros

Secchia, A. y Montiel, S. (1979). *Problemas de Geometría: Geometría del Espacio*. Asunción: Comuneros.

Secchia, A. y Pujol, F. (1979). *Ejercicios de Trigonometría*. Asunción: Comuneros.

Repetto, C. y Fesquet, H. (1968). *Trigonometría y Elementos de Análisis Matemático*. Buenos Aires: Kapelusz.

Velázquez, M.,Bellassai, P., Pino, R., Duré, A., Aranda, T. (2010). Matemática Básica con Estadística (4ta. ed.). Asunción: Litocolor