FP-UNA - CONSTRUYENDO EL FUTURO

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA
Triángulos

MATERIAL DE LECTURA

Este material de lectura fue elaborado por los docentes de la asignatura Geometría y Trigonometría del CPA de la FP-UNA para el desarrollo de la unidad III de dicha asignatura. Contiene información básica y debe ser complementado con los textos de la bibliografía del programa de estudios.

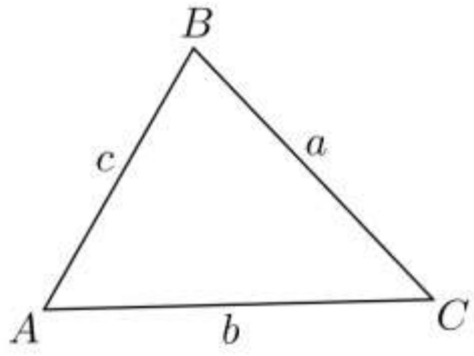
Facultad Politécnica UNA
Curso Preparatorio de Admisión

Índice

TRIÁNGULOS

1. Definición

Dados tres puntos A,B y C no colineales, la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama triángulo ABC.



Notación: $\triangledown ABC \rightarrow$ se lee triángulo ABC

2. Elementos

2.1 Vértices

Los puntos $A,B\, y\, C$ son los vértices del $\triangledown ABC$.

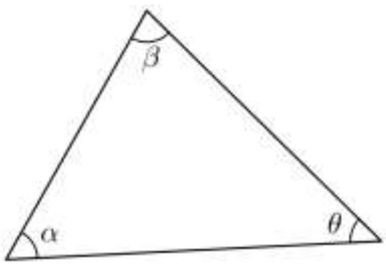
2.2 Lados

Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los lados del triángulo.

NOTA: En la figura de la definición las medidas de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son respectivamente, c, b y a unidades.

3. Propiedades básicas

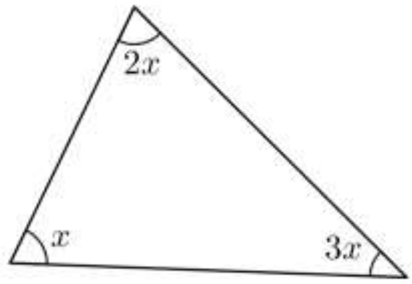
i) **Suma de las medidas de los ángulos internos**. La suma de las medidas de los tres ángulos internos es igual a 180^0.



$$\alpha+\beta+\theta=180^0$$

Ejemplo 1:

En la figura de abajo, el valor de x es igual a:



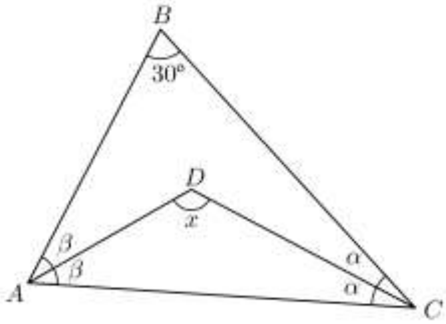
Resolución:

Como la figura es un triángulo y además las medidas de sus ángulos interiores se encuentran en términos de x, entonces aplicando la propiedad i) tenemos que:

$$x+2x+3x=180^0$$
$$6x=180^0$$
$$x=\frac{180^0}{6}$$
$$x=30^0$$

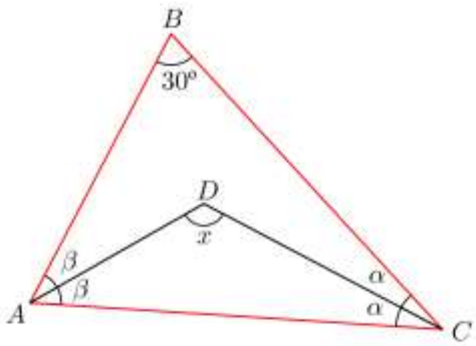
Ejemplo 2:

En la figura de abajo, el valor de x es igual a:



Resolución:

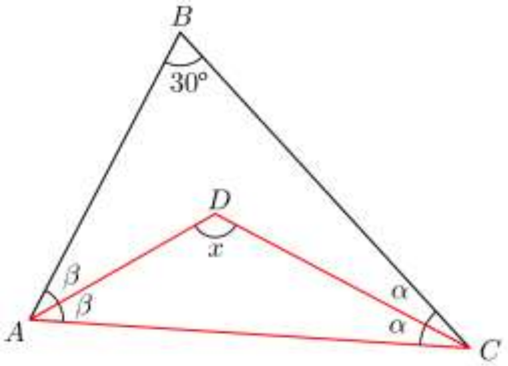
Consideremos el $\triangle ABC$,



aplicando la propiedad i) tenemos que:

$$2\alpha + 2\beta + 30^0 = 180^0$$
$$2\alpha + 2\beta = 180^0 - 30^0$$
$$2(\alpha + \beta) = 150^0$$
$$\alpha + \beta = \frac{150^0}{2}$$
$$\alpha + \beta = 75^0 ....(1)$$

A continuación, consideramos el ∇ADC:



aplicando la propiedad i) tenemos que:

$$\alpha + \beta + x = 180^0 ....(2)$$

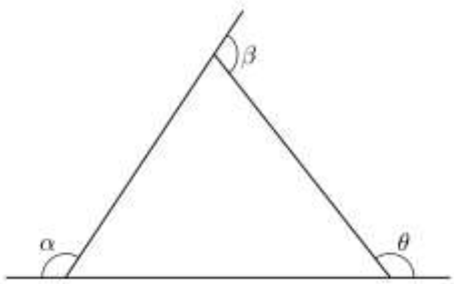
de esta forma tenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 75^0 ....(1) \\ \alpha + \beta + x = 180^0 ....(2) \end{cases}$$

Reemplazando (1) en (2) nos queda:

$$\alpha + \beta + x = (\alpha + \beta) + x = 75^0 + x = 180^0$$
$$75^0 + x = 180^0$$
$$x = 180^0 - 75^0$$
$$x = 105^0$$

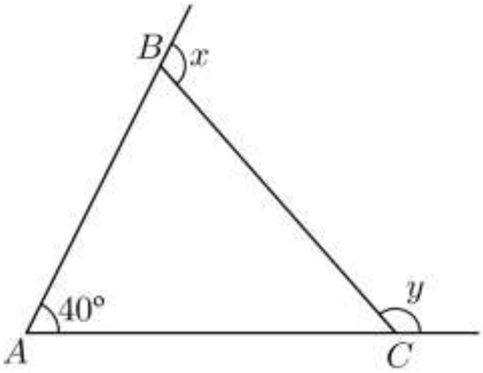
ii) **Suma de las medidas de los ángulos externos considerando uno por cada vértice**. La suma de las medidas de los ángulos exteriores es igual a 360^0.



$$\alpha + \beta + \theta = 360^0$$

Ejemplo 3:

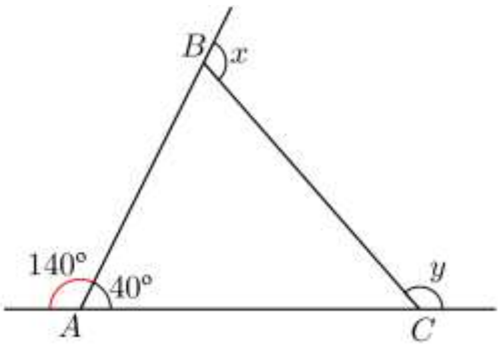
En la figura de abajo, el valor de $x + y$ es igual a:



Resolución:

Resolvemos utilizando la propiedad básica ii), aunque también puede resolverse usando otras propiedades.

Analizando la figura, vemos que el ángulo interior en el vértice A es igual a 40^0, esto implica que el ángulo exterior en ese mismo vértice es igual a 140^0.



Aplicando la propiedad ii) en el $\triangle ABC$ tenemos que:

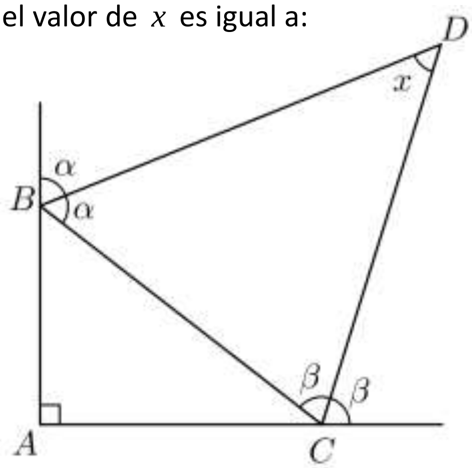
$$x + y + 140^0 = 360^0$$

$$x + y = 360^0 - 140^0$$

$$x + y = 220^0$$

Ejemplo 4:

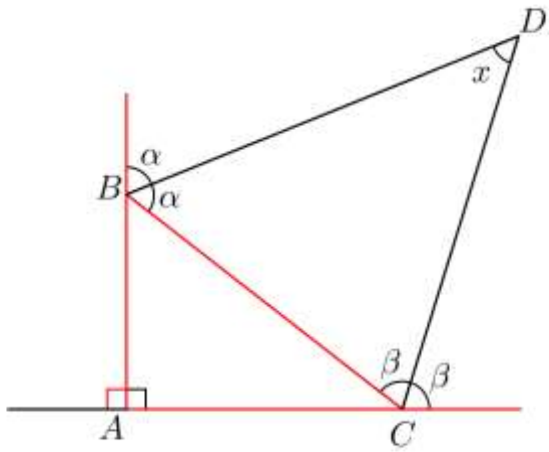
En la figura de abajo, el valor de x es igual a:



Resolución:

Resolvemos utilizando la propiedad básica ii), aunque también puede resolverse usando otras propiedades.

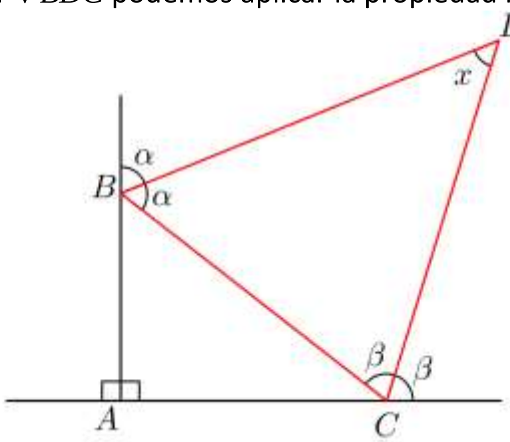
Analizando la figura, vemos que en el $\mathrm{V}ABC$ el ángulo interior en el vértice A es igual a 90^0 esto implica que el ángulo exterior en el vértice A también es igual a 90^0.



De aquí, aplicando la propiedad ii) en el $\mathrm{V}ABC$ tenemos que:

$$90^0+2\alpha+2\beta=360^0$$
$$2(\alpha+\beta)=360^0-90^0$$
$$2(\alpha+\beta)=270^0$$
$$\alpha+\beta=\frac{270^0}{2}$$
$$\alpha+\beta=135^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Ahora bien, en el $\mathrm{V}BDC$ podemos aplicar la propiedad i), entonces:



$$\alpha+\beta+x=180^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

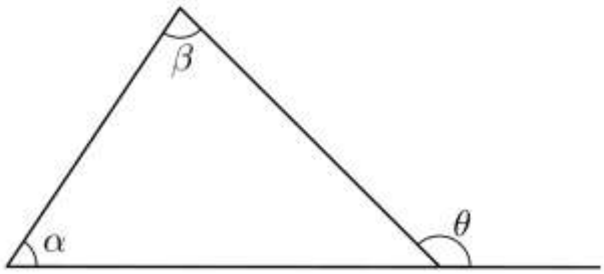
Con esto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \alpha+\beta=135^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \alpha+\beta+x=180^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

De donde reemplazando (1) en (2) nos queda:

$$\alpha+\beta+x=(\alpha+\beta)+x=135^0+x=180^0$$
$$135^0+x=180^0$$
$$x=180^0-135^0$$
$$x=45^0$$

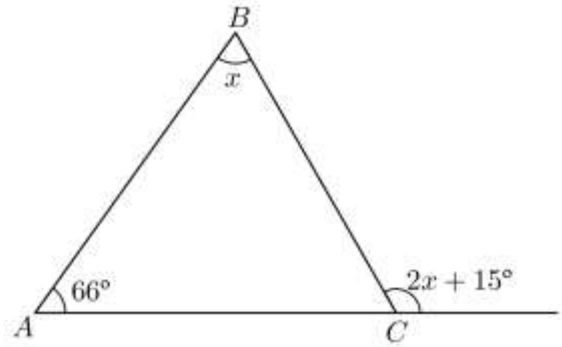
iii) **<u>Cálculo de la medida de un ángulo exterior</u>**. La medida de un ángulo exterior es igual la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes a él.



$$\theta=\alpha+\beta$$

Ejemplo 5:

En la figura de abajo, el valor de x es igual a:



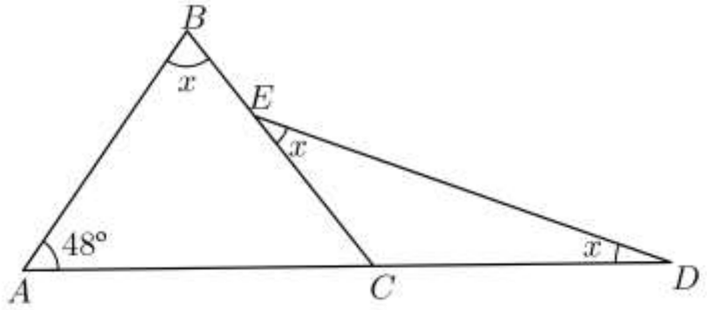
Resolución:

Observamos que 66^0 y x son dos ángulos interiores no adyacentes al ángulo exterior en el vértice C, aplicando la propiedad iii) en el $\triangle ABC$ tenemos que:

$$2x+15^0=66^0+x$$
$$2x-x=66^0-15^0$$
$$x=51^0$$

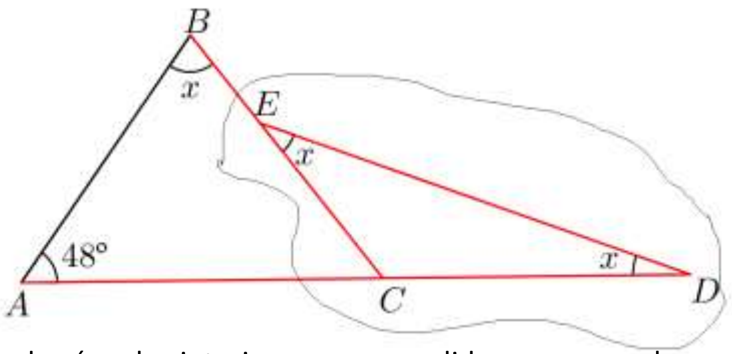
Ejemplo 6:

En la figura de abajo, el valor de x es igual a:

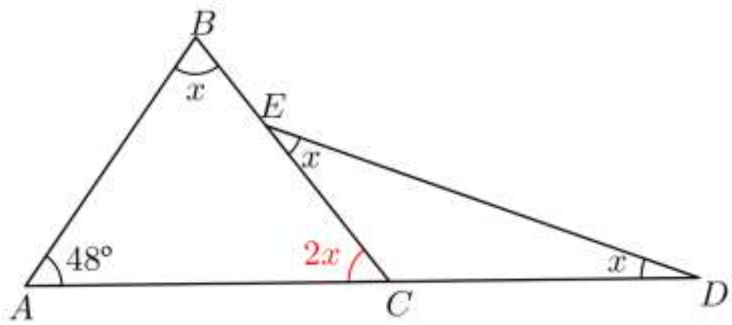


Resolución:

Consideremos el $\triangle EDC$,



Teniendo en cuenta los dos ángulos interiores cuyas medidas son x, por la propiedad iii), el ángulo exterior en el vértice C es igual a $x+x=2x$, esto es:

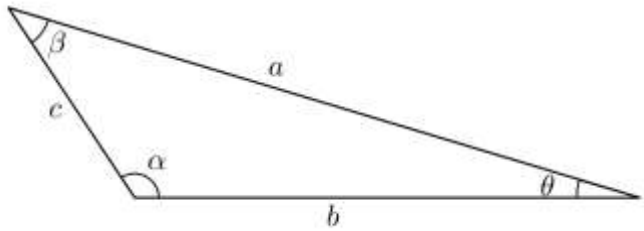


A continuación, aplicando la propiedad i) en el $\triangle ABC$ tenemos:

$$48^0+x+2x=180^0$$
$$3x=180^0-48^0$$
$$3x=132^0$$
$$x=\frac{132^0}{3}$$
$$x=44^0$$

iv) <u>Propiedades de correspondencia</u>.

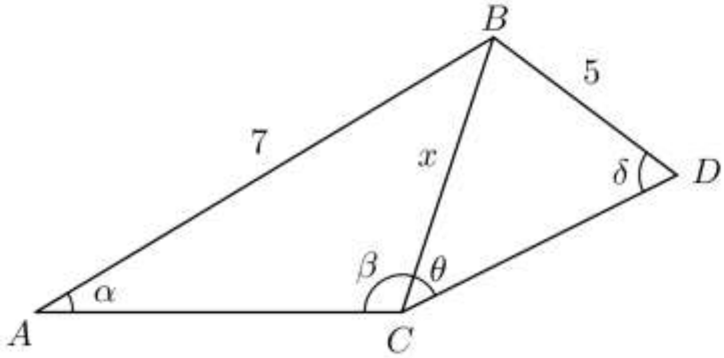
En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo, además, a menor lado se opone menor ángulo.



$$a > b > c \;\Leftrightarrow\; \alpha > \beta > \theta$$

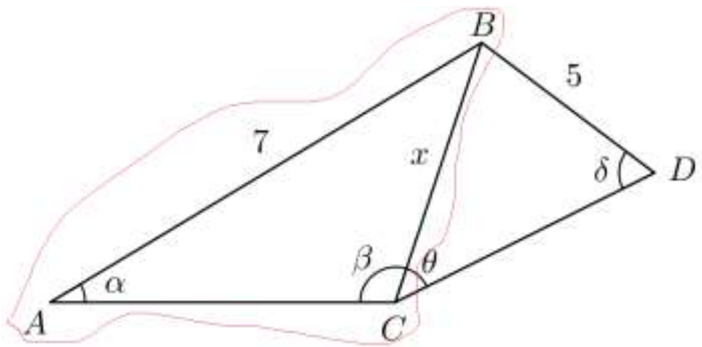
Ejemplo 7:

En la figura de abajo $\alpha < \beta$ y $\theta < \delta$, el valor entero de x es igual a:

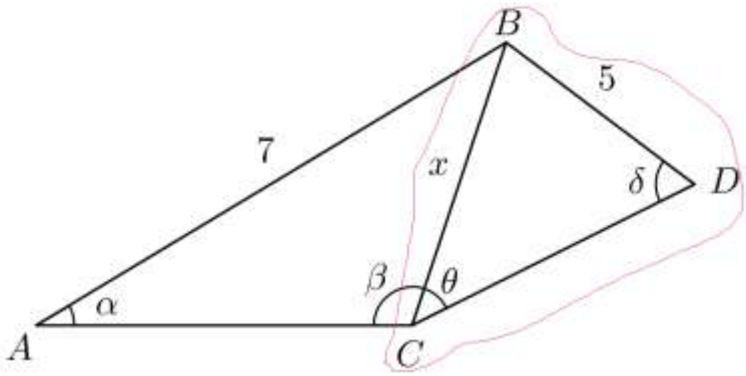


Resolución:

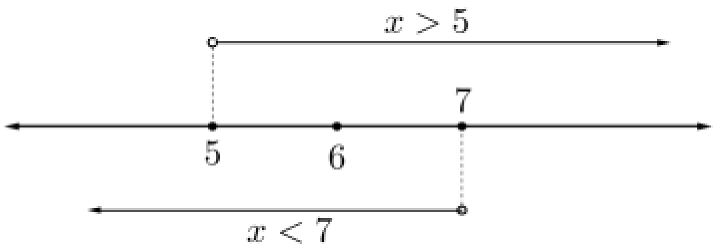
Como $\alpha < \beta$ aplicando la propiedad iv) en el $\triangle ABC$ tenemos que: $x < 7$



Y además, al ser $\theta < \delta$ y aplicando la propiedad iv) en el $\triangle BDC$ tenemos que: $x > 5$



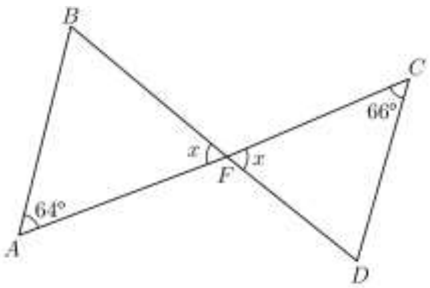
Entonces:



De todos los valores de x que se encuentran entre 5 y 7 el único valor entero que puede tomar es igual a 6 .

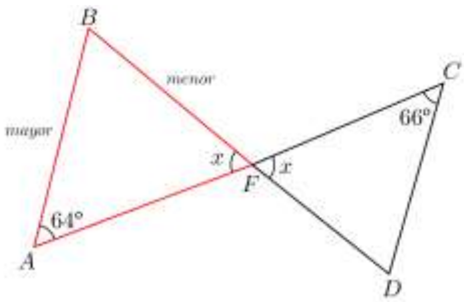
Ejemplo 8:

En la figura de abajo $AB > BF$ y $FD > CD$, el valor entero de x es igual a:

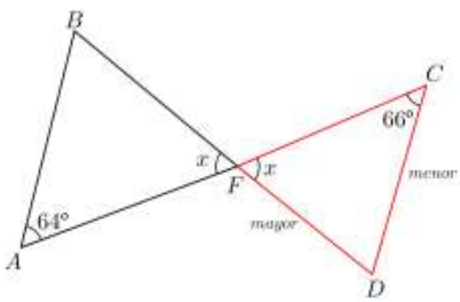


Resolución:

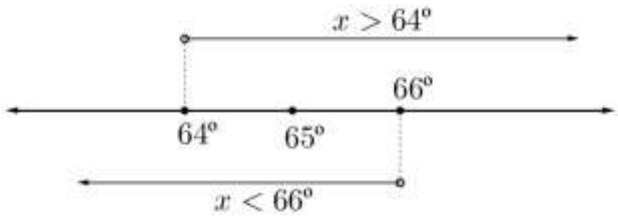
Como $AB > BF$, aplicando la propiedad iv) en el $\triangle ABC$, tenemos que $64^0 < x$.



Y además, sabemos que $FD > CD$, aplicando la propiedad iv) en el $\triangle FCD$, tenemos que $x < 66^0$



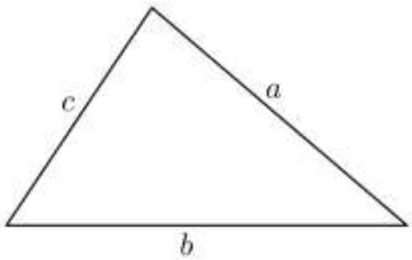
Entonces:



De todos los valores de x que se encuentran entre 64^0 y 66^0, el único valor entero que puede tomar es igual a 65^0.

v) **<u>Relación de correspondencia</u>.**

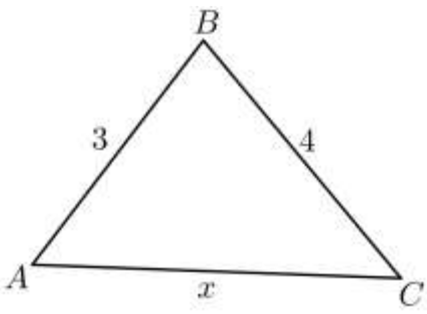
En todo triángulo cualquier lado es mayor que la diferencia de los otros dos y menor que su suma.



$$
\begin{aligned}
b - c &< a < b + c \\
a - c &< b < b + c \\
a - b &< c < a + b
\end{aligned}
$$

Ejemplo 9:

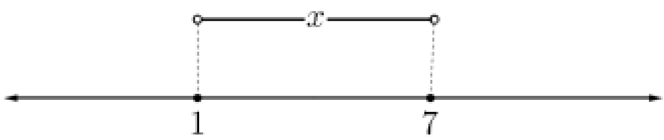
En la figura de abajo, el conjunto de valores enteros que puede tomar x es igual a:



Resolución:

Aplicando la propiedad v) en el $\triangle ABC$ tenemos que: $4-3 < x < 4+3$

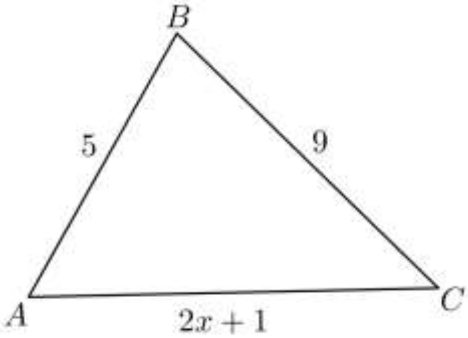
o bien $1 < x < 7$. De aquí,



el conjunto de valores enteros que puede tomar x es $\{2,3,4,5,6\}$.

Ejemplo 10:

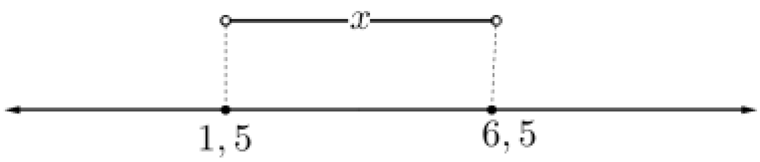
En la figura de abajo, el máximo valor entero que puede tomar x, es igual a:



Resolución:

Aplicando la propiedad v) en el $\triangledown ABC$ tenemos que: $9-5<2x+1<9+5$ o bien $4<2x+1<14$. De aquí,

$$4<2x+1<14............+(-1)$$
$$3<2x<13..............\div(2>0)$$
$$\frac{3}{2}<x<\frac{13}{2} \quad \text{o} \quad 1{,}5<x<6{,}5$$



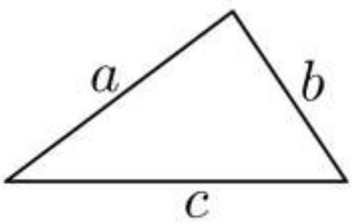
el conjunto de valores enteros que puede tomar x es $\{2,3,4,5,6\}$. Finalmente, el máximo valor entero es igual a 6.

4. Clasificación y propiedades de los triángulos

4.1 Según sus lados

4.1.1 Escaleno

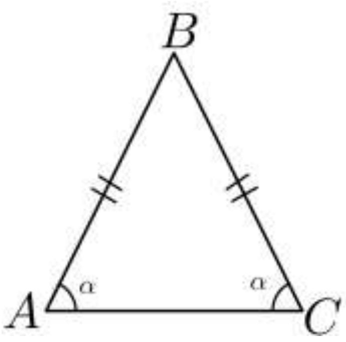
Todos sus lados tienen diferentes medidas.



$$a\neq b,\ a\neq c \quad y \quad b\neq c$$

4.1.2 Isósceles

Tiene dos lados de igual medida.

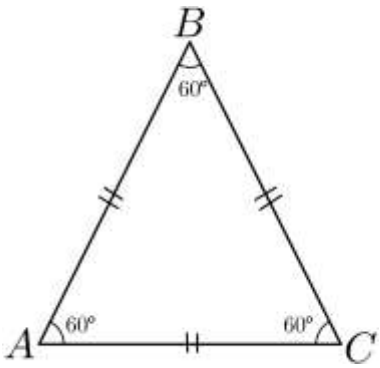


$$AB = BC$$

NOTA: En un triángulo isósceles los lados opuestos a los ángulos iguales tienen igual medida, además el tercer lado se llama base.

4.1.3 Equilátero

Los tres lados tienen igual medida.

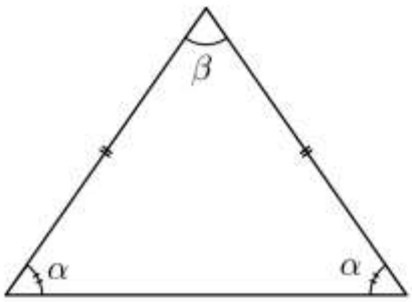


$$AB = BC = AC$$

Ejemplo 11:

En un triángulo isósceles la suma de las medidas de dos ángulos diferentes es igual a 110^0. La suma de las medidas de los ángulos adyacentes a su base, es igual a:

Resolución:



Según la condición del ejercicio se cumple que: $\alpha+\beta=110^0$.

Aplicando la propiedad básica i) en el triángulo isósceles construido tenemos que: $2\alpha+\beta=180^0$. A continuación, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=110^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ 2\alpha+\beta=180^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

De esta forma, haciendo (2)-(1) queda:

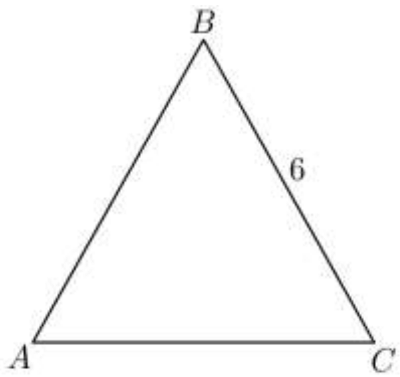
$$\begin{aligned}&(2\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)=180^0-110^0\\ &2\alpha+\beta-\alpha-\beta=70^0\\ &\alpha=70^0\end{aligned}$$

De aquí, la suma de las medidas de los ángulos adyacentes a su base es:

$$2\alpha=140^0$$

Ejemplo 12:

En la figura de abajo, $\triangle ABC$ es equilátero, $AC=x+y$ y $AB=2x-y$, el valor de $\dfrac{x-y}{x+2y}$, es igual a:



Resolución:

Que $\triangle ABC$ sea equilátero implica que

$$\begin{cases}AB=AC\\ AB=AC=6\end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{cases}x+y=2x-y\\ x+y=6\end{cases}$$

Tomando el hecho de que $AC = x + y = 6$, resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2x - y..........(1) \\ x + y = 6.................(2) \end{cases}$$

Reduciendo términos en la ecuación (1) nos queda: $\begin{cases} 2y = x..................(1) \\ x + y = 6..............(2) \end{cases}$

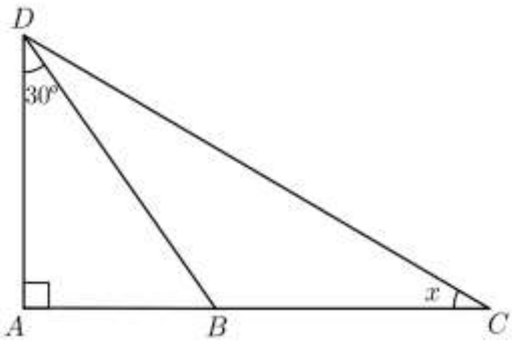
De aquí, haciendo (1) en (2) resulta:

$$x + y = 2y + y = 6$$
$$3y = 6$$
$$y = \frac{6}{3}$$
$$y = 2$$

Con esto, $x = 2y = 2 \cdot 2 = 4$ y finalmente $\frac{x - y}{2x + y} = \frac{4 - 2}{2 \cdot 2 + 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

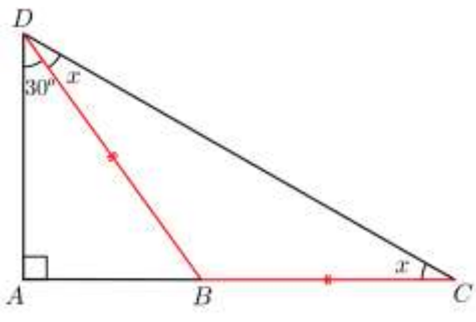
Ejemplo 13:

En la figura de abajo el $BC = BD$, el valor de x, es igual a:

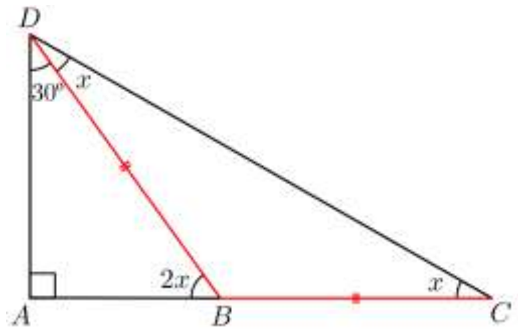


Resolución:

Como $BC = BD$ entonces $\triangle DCB$ es isósceles,



Aplicando la propiedad básica iii) en el $\text{V}\,DCB$ tenemos:



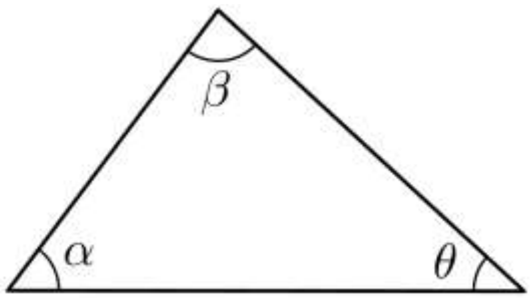
Y, por último, en $\text{V}\,ABC$ aplicamos la propiedad básica i)

$$90^0+30^0+2x=180^0$$
$$2x=180^0-90^0-30^0$$
$$2x=60^0$$
$$x=\frac{60^0}{2}$$
$$x=30^0$$

4.2 Según sus ángulos

4.2.1 Triángulo Acutángulo

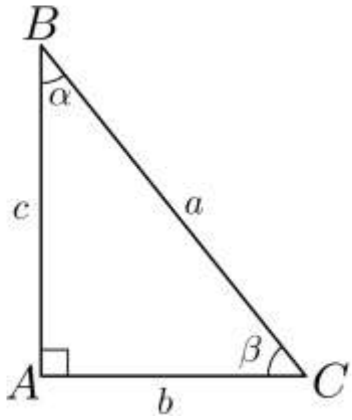
Todos sus ángulos interiores son agudos.



$$0^0<\alpha<90^0$$
$$0^0<\beta<90^0$$
$$0^0<\theta<90^0$$

4.2.2 Triángulo rectángulo

Uno de sus ángulos interiores mide 90^0.

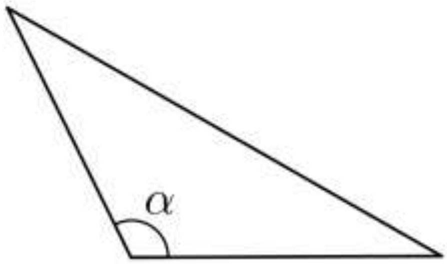


NOTA: En un triángulo rectángulo:

- Los dos ángulos restantes son agudos y complementarios (suman 90^0).
- El lado opuesto al ángulo de 90^0 se llama **hipotenusa**, y los lados opuestos a los ángulos agudos se llaman **catetos**.

4.2.3 Triángulo obtusángulo

Un ángulo interior es obtuso.

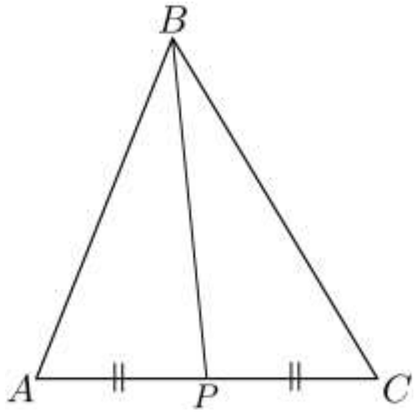


5. Líneas y puntos notables en el triángulo

5.1 Medianas y baricentro

Una mediana de un triángulo es un segmento que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.

En la figura de abajo, $\overline{BP}$ es una mediana del triángulo ABC.

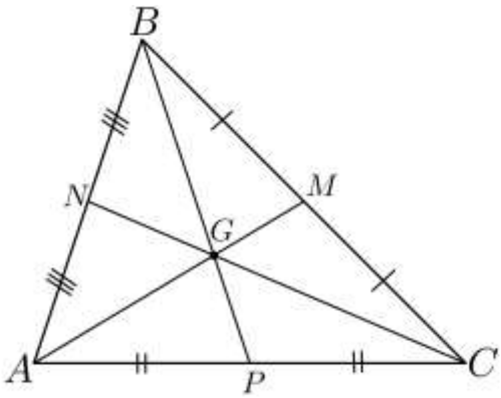


NOTA: Si la mediana de un triángulo ABC tiene un extremo en el vértice B, se dice que es la mediana relativa al vértice B o que es la mediana relativa al lado $\overline{AC}$.

Teorema: En todo triángulo, las tres medianas se intersecan en un punto interior del mismo.

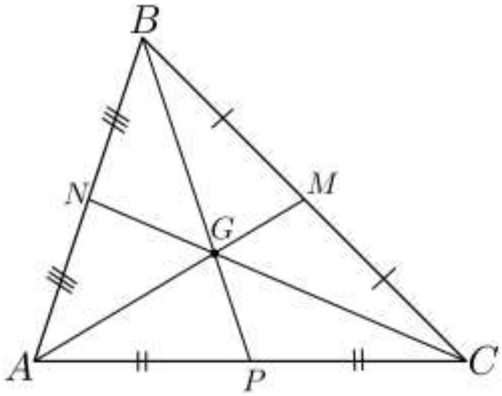
Definición: El punto de intersección de las tres medianas de un triángulo se denomina **baricentro** del triángulo.

En la figura de abajo $\overline{AM}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CN}$ son las medianas del $\triangle ABC$ y G es su baricentro.



Teorema: El baricentro divide a una mediana en dos segmentos, de modo que, el segmento que contiene al vértice es el doble del otro segmento.

En la figura de abajo se cumplen:



1) $AG = 2GM$
2) $BG = 2GP$
3) $CG = 2GN$

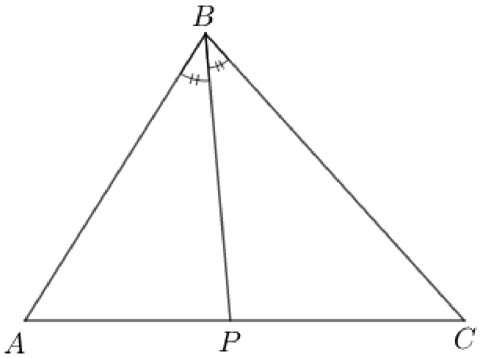
NOTA:

- El 1) equivale a $AG = \frac{2}{3}AM$.
- El prefijo "bari" proviene del griego y significa "masa". Esto es, el baricentro es el centro de masa del triángulo.

5.2 Bisectrices interiores e incentro.

Una bisectriz (interior) de un triángulo es un segmento que une un vértice al lado opuesto, dividiendo el ángulo interno correspondiente a ese vértice en dos ángulos de la misma medida.

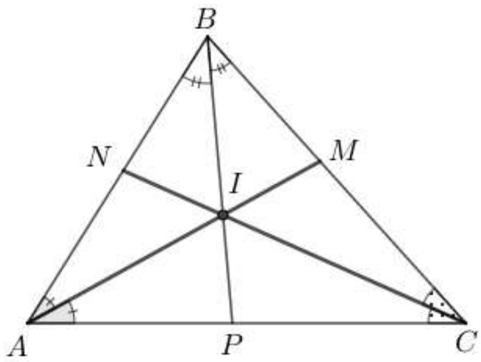
En la figura de abajo, $\overline{BP}$ es una bisectriz del $\triangle ABC$, la bisectriz relativa al vértice B.



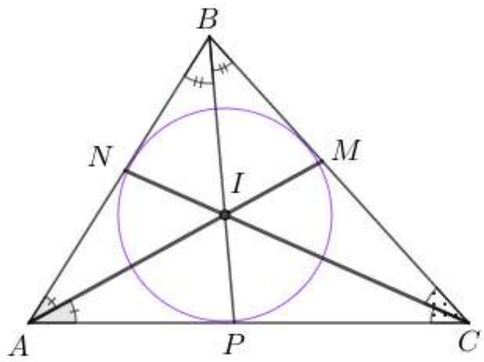
Teorema: En todo triángulo, las tres bisectrices (interiores) se intersecan en un punto interior del mismo.

Definición: El punto de intersección de las tres bisectrices (interiores) de un triángulo se denomina **incentro** del triángulo.

En la figura de abajo, $\overline{AM}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CN}$ son las bisectrices del $\triangle ABC$ e I es su incentro.



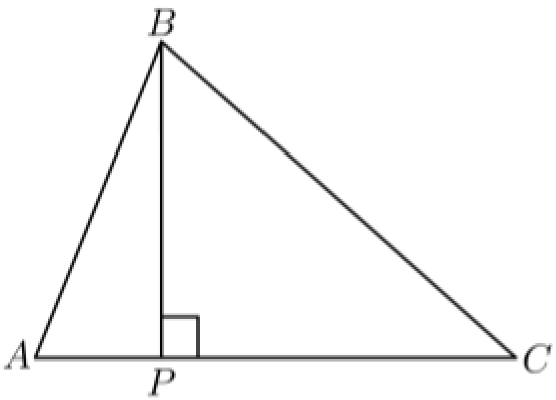
Teorema: El incentro de un $\triangle ABC$ es el centro de la circunferencia inscripta a dicho triángulo.



5.3 Alturas y ortocentro

Una **altura** de un triángulo es un segmento que une un vértice al lado opuesto o a su prolongación en forma perpendicular.

En la figura de abajo, $\overline{BP}$ es una altura del triángulo ABC, **correspondiente al vértice** B.



Teorema: En todo triángulo, las tres alturas o sus prolongaciones se intersecan en un punto.

<u>Definición:</u> El punto de intersección de las tres alturas o de sus prolongaciones se denomina **ortocentro** del triángulo.

<u>Teorema:</u>

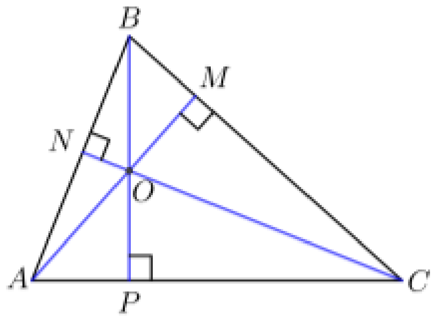
a) En un triángulo **acutángulo**, el ortocentro es un punto **interior** del triángulo.

b) En un triángulo **obtusángulo**, el ortocentro es un punto **exterior** del triángulo.

c) En un triángulo **rectángulo**, el ortocentro es el **vértice** del ángulo recto.

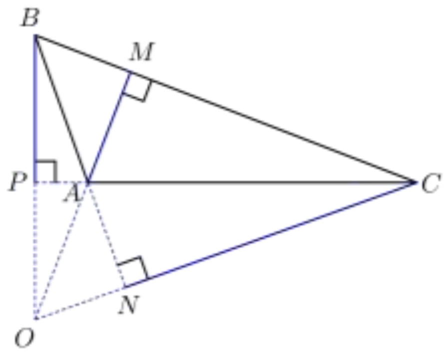
En las figuras de abajo se pueden observar las alturas y el ortocentro, según la naturaleza del triángulo.

i) En un triángulo acutángulo



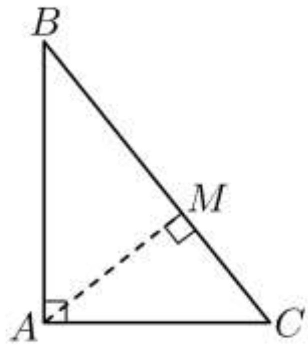
$\overline{AM}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CN}$ son las alturas del $\triangle ABC$. El punto O es el ortocentro.

ii) En un triángulo obtusángulo



$\overline{AM}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CN}$ son las alturas del $\triangle ABC$. El punto O es el ortocentro.

iii) En un triángulo rectángulo

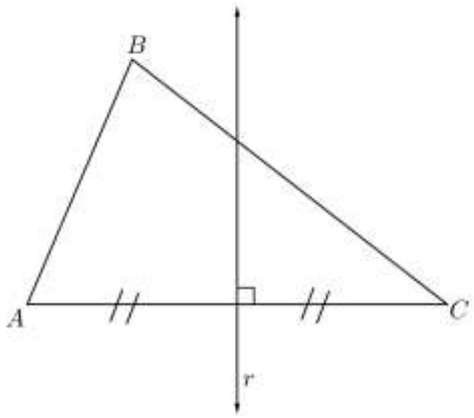


$\overline{AM}$ y los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son las alturas del $\triangle ABC$. El punto A es el ortocentro.

5.4 Mediatrices y circuncentro

Una **mediatriz** de un triángulo es una recta que corta a uno de sus lados en su punto medio y en forma perpendicular. Es decir, una mediatriz de un triángulo es cualquiera de las mediatrices de los lados del triángulo.

En la figura de abajo, r es una mediatriz del triángulo ABC, la **mediatriz correspondiente al lado** $\overline{AC}$.



Teorema: En todo triángulo, las tres mediatrices se intersecan en un punto.

Definición: El punto de intersección de las tres mediatrices se denomina **circuncentro** del triángulo.

Teorema: El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo, es decir, el circuncentro equidista de los vértices del triángulo.

<u>Teorema:</u>

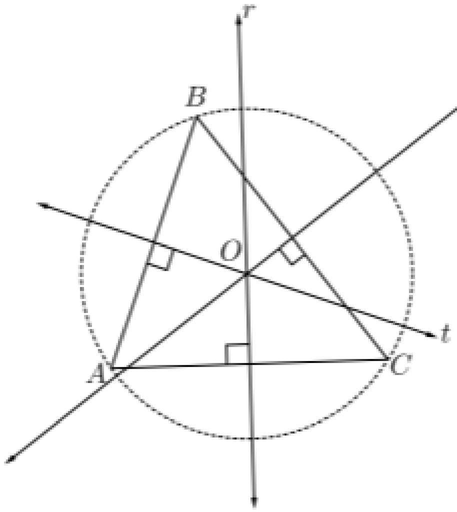
a) En un triángulo **acutángulo**, el circuncentro es un punto **interior** del triángulo.

b) En un triángulo **obtusángulo**, el circuncentro es un punto **exterior** del triángulo.

c) En un triángulo **rectángulo**, el circuncentro es el **punto medio** de la hipotenusa.

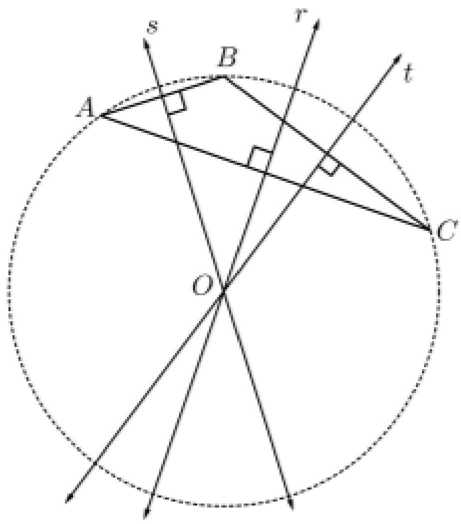
En las figuras de abajo se pueden observar las mediatrices y el circuncentro, según la clase del triángulo.

i) En un triángulo acutángulo



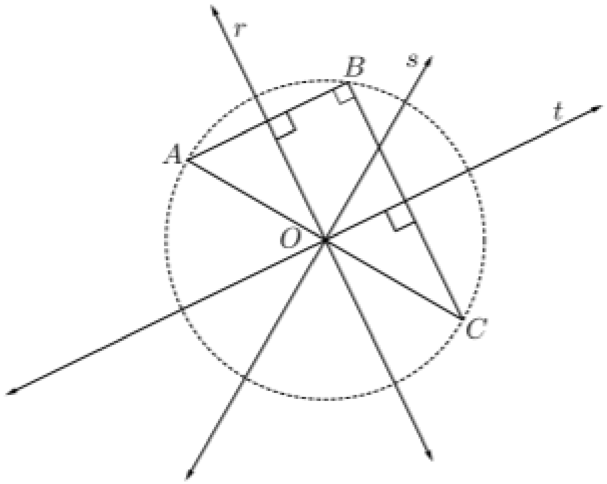
r, s y t son las mediatrices del $\triangle ABC$ y O es su circuncentro. Note que O es un punto interior del $\triangle ABC$.

ii) En un triángulo obtusángulo



r, s y t son las mediatrices del $\triangle ABC$ y O es su circuncentro. Note que O es un punto exterior del $\triangle ABC$.

iii) En un triángulo rectángulo



r, s y t son las mediatrices del $\triangle ABC$ y O es su circuncentro. Notemos que O es el punto medio de la hipotenusa del $\triangle ABC$.

5.5 La recta de Euler

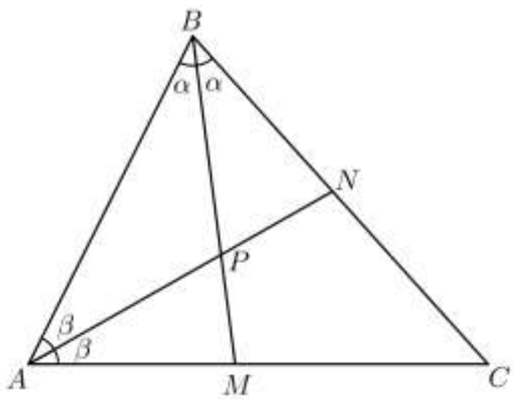
En un triángulo equilátero, los cuatro puntos notables (baricentro, incentro, ortocentro y cincuncentro) coinciden, y en un triángulo no equilátero, el baricentro, ortocentro y circuncentro son puntos colineales. La recta que los contiene se denomina recta de Euler.

Ejemplo 14:

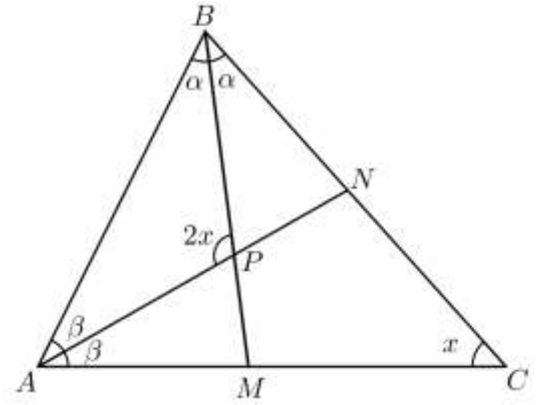
En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores de los ángulos A y B que se intersecan en P, si la: $\angle APB = 2\overset{\angle}{C}$, la medida del ángulo interior C es igual a:

Resolución:

Sean $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ las bisectrices interiores de los ángulos A y B, respectivamente.



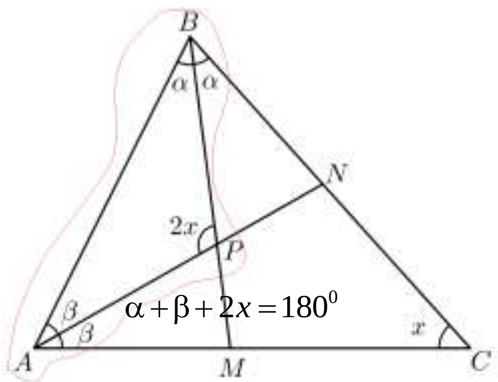
Como $\angle APB = 2\overset{\angle}{C}$, representamos de esta forma:



Por último, en $\triangle ABC$ aplicamos la propiedad básica i), por lo que:

$$2\alpha + 2\beta + x = 180^0$$

Con la misma propiedad en el $\triangle ABP$,



Luego, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2x = 180^0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2\alpha + 2\beta + x = 180^0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Haciendo 2x(1)-(2) nos queda:

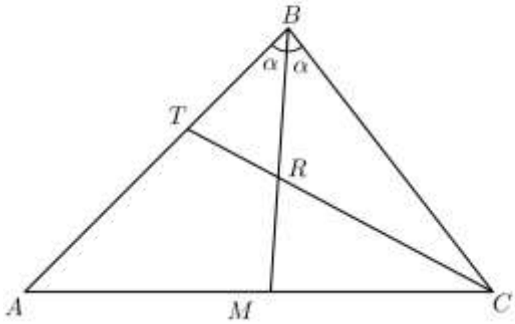
$$2(\alpha + \beta + 2x) - (2\alpha + 2\beta + x) = 2 \times 180^0 - 180^0$$
$$2\alpha + 2\beta + 4x - 2\alpha - 2\beta - x = 180^0$$
$$3x = 180^0$$
$$x = \frac{180^0}{3}$$
$$x = 60^0$$

Ejemplo 15:

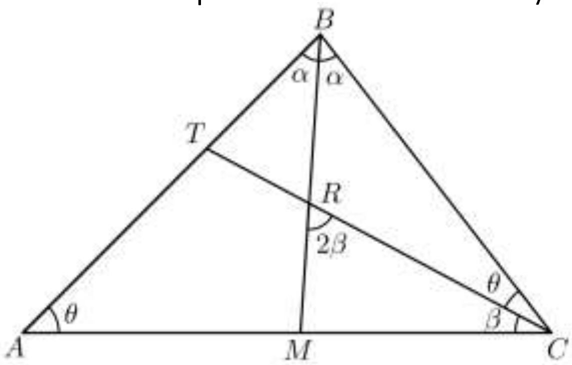
En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BM}$ y el segmento interior $\overline{CT}$ las cuales se intersectan en R, si $m\angle MRC = 2m\angle RCB$ y $m\angle RCB = m\angle BAC$ la medida del ángulo RCM es igual a:

Resolución:

Como la bisectriz interior $\overline{BM}$ y el segmento interior $\overline{CT}$ se intersectan en R, lo representamos de la siguiente manera:



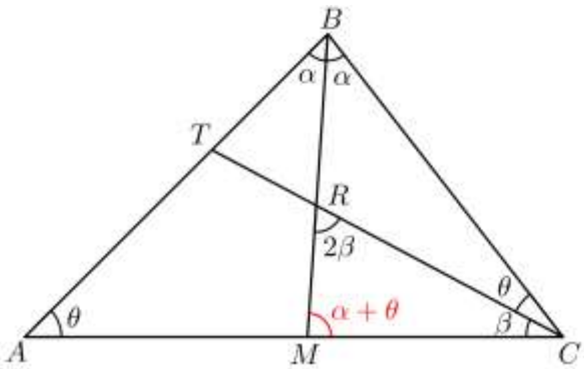
Agregamos a la gráfica el hecho de que $m\angle MRC = 2m\angle RCB$ y $m\angle RCB = m\angle BAC$



Ahora bien, en $\text{V}ABC$ aplicamos la propiedad básica i), por lo que:

$$\theta + 2\alpha + \theta + \beta = 180^0$$
$$2\theta + 2\alpha + \beta = 180^0$$

Y en el $\text{V}ABM$, aplicamos la propiedad básica iii)



En el ∇RCM aplicamos la propiedad básica i),

$$\alpha+\theta+2\beta+\beta=180^0$$
$$\alpha+\theta+3\beta=180^0$$

Luego, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2\theta+2\alpha+\beta=180^0 \ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ \alpha+\theta+3\beta=180^0 \ldots\ldots\ldots\ldots.(2) \end{cases}$$

Haciendo 2x(2)-(1) nos queda:

$$2(\alpha+\theta+3\beta)-(2\theta+2\alpha+\beta)=2\times180^0-180^0$$
$$2\alpha+2\theta+6\beta-2\theta-2\alpha-\beta=180^0$$
$$5\beta=180^0$$
$$\beta=\frac{180^0}{5}$$
$$\beta=36^0$$

Bibliografía

Giovanni, J., Bonjorno, J., Giovanni, J.Jr. y Acosta, R. (2005). *Matemática Fundamental: volumen único*. São Paulo: FTD.

Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría*. México: Grupo Patria Cultural.

Dolce, O. y Pompeo, J. (2005). *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana*. São Paulo: Atual.

Dolce, O. y Pompeo, J. (2013). *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria espacial*. São Paulo: Atual.

Iezzi, G. (1998). *Fundamentos de Matemática Elementar: trigonometria*. São Paulo: Atual.

Alexander, D., & Koeberlein, G. (2013). *Geometría* (Quinta ed.). (J. L. Cárdenas, Trans.) México: CengageLearning.

Campos, X. C., & Schmidt, X. C. (2012). *Geometría* (Segunda ed.). Santiago, Chile: McGraw-Hill.

Moise, E. E., & Floy L.Downs, J. (1986). *Geometría Moderna.* (M. García, Trans.) Wilmington, Delaware, Estados Unidos: Addison-Wesley.

Dante, L. R. (2002). *Matemática*. Sao Paulo, Brasil: Ática.

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). Matemáticas simplificadas (3era. ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.

Secchia, A. y Montiel, S. (1980). *Problemas de Geometría: Geometría Plana*. Asunción: Comuneros

Secchia, A. y Montiel, S. (1979). *Problemas de Geometría: Geometría del Espacio*. Asunción: Comuneros.

Secchia, A. y Pujol, F. (1979). *Ejercicios de Trigonometría*. Asunción: Comuneros.

Repetto, C. y Fesquet, H. (1968). *Trigonometría y Elementos de Análisis Matemático*. Buenos Aires: Kapelusz.

Velázquez, M., Bellassai, P., Pino, R., Duré, A., Aranda, T. (2010). Matemática Básica con Estadística (4ta. ed.). Asunción: Litocolor